

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Pondichéry juin 1993 ∞

EXERCICE 1

4 points

À tout nombre complexe  $z$  non nul, on associe dans le plan orienté, rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , les points A, B, C d'affixes respectives :

$$a = z \quad b = \bar{z} \quad c = \frac{z^2}{\bar{z}}$$

1. On note  $r$  le module de  $z$  et  $\theta$  un argument de  $z$ .  
Exprimer en fonction de  $r$  et de  $\theta$  le module et l'argument de  $b$  et  $c$ .
2. Comment faut-il choisir  $z$  pour que les points A, B, C soient distincts deux à deux?  
Dans la suite de l'exercice on supposera cette condition réalisée.
3. **a.** Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O.  
**b.** Montrer que  $AB = AC$ .  
**c.** Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique des points B et C. Justifier et réaliser la construction.
4. **a.** Montrer que l'angle  $(\vec{CB}, \vec{CA})$  a pour mesure  $\theta$  ou  $\theta + \pi$ .  
**b.** En déduire l'ensemble (E) des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral. Représenter cet ensemble (E) dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

EXERCICE 2

4 points

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines.

Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien.

Pour un certain type de machines, le technicien constate :

- qu'il doit intervenir la première semaine,
- que s'il est intervenu la  $n$ -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la  $(n+1)$ -ième semaine est égale à  $3/4$ ,
- que s'il n'est pas intervenu la  $n$ -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la  $(n+1)$ -ième semaine est égale à  $1/10$ .

On désigne par  $E_n$  l'évènement : « le technicien intervient la  $n$ -ième semaine » et par  $p_n$  la probabilité de cet évènement  $E_n$ .

1. Déterminer les nombres :  $p(E_1)$ ,  $p(E_{n+1}/E_n)$  et  $p(E_{n+1}/\overline{E_n})$ , puis en fonction de  $p_n$  :  $p(E_{n+1} \cap E_n)$  et  $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$ .
2. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul :

$$p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose  $q_n = p_n - \frac{2}{7}$ .

Montrer que la suite  $(q_n)$  est une suite géométrique.

En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

Pour quelles valeurs de l'entier  $n$ , la probabilité que le technicien intervienne la  $n$ -ième semaine est-elle inférieure à  $3/10$ ?

**PROBLÈME**

**11 points**

*La partie III du problème peut être traitée indépendamment de la partie II*

On désigne par  $f_1$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$  par :

$$f_1(x) = \ln(e^x + 1).$$

**I. Étude de la fonction  $f_1$**

1. **a.** Préciser les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
**b.** Étudier les variations de  $f_1$  et construire son tableau de variations.
2. Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $f_1(x) = x + \ln(e^{-x} + 1)$ .  
Déduire de ce qui précède que la courbe  $(C_1)$  représentative de la fonction  $f_1$ , admet deux droites asymptotes dont la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$ .  
Déterminer la position de  $(C_1)$  par rapport à chacune d'elles.
3. Construire la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_1)$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

**II. Étude d'une intégrale**

On désire déterminer un encadrement de l'intégrale :  $I = \int_0^1 f_1(t) dt$ .

À cet effet, on considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 - f_1(x).$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction  $g'$  (dérivée de  $g$ ) sur l'intervalle  $[0; 1]$ . En déduire le signe de  $g'(x)$ .  
**b.** Étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .
2. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$  :  $0 \leq g(x) \leq 5 \cdot 10^{-3}$ .
3. En déduire un encadrement de l'intégrale  $I$ .  
Donner pour  $I$  une valeur décimale approchée en précisant l'approximation obtenue.

**III. Étude géométrique d'une famille de courbes**

1.  $k$  étant un nombre réel non nul, on désigne par  $D_k$  l'ensemble des solutions dans l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$  de l'inéquation :  $e^x + k > 0$ .

- a. Selon  $k$ , déterminer  $D_k$  (on distinguera les cas  $k > 0$  et  $k < 0$ ).

À tout réel  $k$ , on associe la fonction notée  $f_k$  définie pour  $x \in D_k$  par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + k).$$

On désigne par  $(C_k)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- b. Établir le tableau de variation de  $f_k$  pour chacun des cas  $k > 0$  et  $k < 0$ .

En déduire que pour tout réel non nul  $k$ , l'image par  $f$  de  $D_k$  est  $D_{-k}$ .

2. a. Montrer que si  $k > 0$ , alors : pour tout réel  $x$ ,

$$f_k(x + \ln k) = f_1(x) + \ln k.$$

- b. En déduire que si  $k > 0$ , alors la courbe  $(C_k)$  représentative de la fonction  $f_k$  se déduit de  $(C_1)$  par une transformation géométrique simple que l'on justifiera.

Construire sans calcul la courbe  $(C_2)$  représentative de  $f_2$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

3.  $(\Delta)$  étant la droite d'équation  $y = x$ , on désigne par  $S_\Delta$  la symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$ . On admettra que  $S_\Delta$  associe à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  le point  $M'$  de coordonnées  $(y; x)$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $D_k$  et pour tout réel  $y$  de  $D_{k'}$  le point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  est un point de  $(C_k)$  si et seulement si le point  $M'$  de coordonnées  $(y; x)$  est un point de  $(C_{-k})$ .

- b. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Construire sans calcul la courbe  $(C_{-1})$  représentative de  $f_{-1}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .