

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Pondichéry avril 1982 ∞

EXERCICE 1

On considère le nombre A qui s'écrit dans le système décimal : $A = \overline{xyxyxyxyx5}$, x et y étant des chiffres de ce système, x étant non nul.

1. À quelle condition ce nombre est-il divisible par 25 ?
2. Déterminer les différentes valeurs de A , telles que A soit divisible par 225.
3. On considère le nombre $B = \overline{xyxyxy}$ toujours écrit dans le système décimal avec x et y qui sont des chiffres, x étant non nul. Déterminer B tel que B soit divisible par 225.

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction numérique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = 1 + e^t + te^t.$$

Étudier les variations de φ . En déduire le signe $\varphi(t)$ suivant les valeurs de t .

2. On définit la fonction numérique f par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- b. Étudier les variations de f .

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f (on pourra poser $t = \frac{1}{x}$).

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6 cm (on admettra que la courbe est au-dessus de l'asymptote).

PROBLÈME

Notations : E est un espace affine, \vec{E} est son espace vectoriel associé. f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans E ; \vec{f}_1 et \vec{f}_2 sont les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2 .

Pour tout point M de E , on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$.

Étant donné deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de $f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2$ qui à tout point M de E associe le point $f(M)$, barycentre de M_1 affecté du coefficient α_1 et de M_2 affecté du coefficient α_2). On notera M' l'image par f du point M .

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont deux éléments de E , f_1 est la translation de vecteur \vec{V}_1 et f_2 est la translation de vecteur \vec{V}_2 .

Montrer que f est la translation de vecteur $\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$.

2. Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E, D' est une droite vectorielle de E distincte de la direction de D, $f_1 = \text{Id}_E$ et f_2 est la projection affine sur D de direction D'.
- Montrer que les points de D sont invariants par f .
 - Exprimer $\overrightarrow{M2M'}$, en fonction de α_1 et de $\overrightarrow{M2M}$. Dessiner l'image M' d'un point M par f dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Quelle est l'application f dans le cas où $\alpha_1 = -1$?

Partie B

1. Soit O un point de E. Montrer que

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1 f_1(\overrightarrow{OM}) + \alpha_2 f_2(\overrightarrow{OM})$$

pour tout point M de E (on rappelle que M' désigne $f(M)$ et O' désigne $f(O)$). En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 , quelle est la nature de f (discuter)?
3. Dans cette question E est un plan affine.
- (A, B, C, D) est un parallélogramme de E ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), g est une application affine. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) :
 - Soit $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$ deux parallélogrammes ($\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$). (On suppose que (A_1, B_1, C_1, D_1) n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que

$$f_2(A_1) = A_2, f_2(B_1) = B_2, f_2(C_1) = C_2, f_2(D_1) = D_2.$$

- Soit A', B', C', D' les barycentres respectifs de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) , (B_1, α_1) et (B_2, α_2) , (C_1, α_1) et (C_2, α_2) , (D_1, α_1) , (D_2, α_2) .
Montrer que (A', B', C', D') est un parallélogramme.

Partie C

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_1)$. À tout point M de E on associe son affixe z .

- Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de E. Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).
- f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport k' : ($k > 0$), de même angle θ , de centres respectifs A_1 et A_2 . Montrer que f est la similitude directe de rapport k , d'angle θ et de centre A barycentre de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) .
- Soit un carré (A, B, C, D) ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et g une similitude directe. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(g(A)g(B), g(A)g(D))}.$$

- (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \quad \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$$

et

$$\left(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 D_1} \right) = \left(\overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 D_2} \right).$$

Montrer qu'il existe une similitude directe f_2 telle que

$$A_2 = f_2(A_1), B_2 = f_2(B_1), C_2 = f_2(C_1), D_2 = f_2(D_1).$$

A', B', C', D' , étant définis comme dans B 3. c. montrer que (A', B', C', D') est un carré, éventuellement réduit à un point.

N.B. - Pour a. et b. l'usage des nombres complexes est déconseillé.

4. On se donne trois points A_1, A_2, B distincts.

M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{A_1 M_1} \right) = \omega t$ ($\omega \neq 0$).

M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\overrightarrow{A_2 B}, \overrightarrow{A_2 M_2} \right) = \omega t$.

M' est le barycentre de (M_1, α_1) et (M_2, α_2) .

Quel est le mouvement de M' (utiliser la question C 2.)?