

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Pondichéry avril 1988 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9.$$

- a. Calculer $P(3)$.
 - b. Montrer que $P(z)$ peut se mettre sous la forme $(z - 3)Q(z)$ où Q est un polynôme que l'on déterminera.
 - c. On pose $z = Z + 2i$ et $Q(z) = Q_1(Z)$.
Déterminer le polynôme Q_1 puis résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Q_1(Z) = 0$.
 - d. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.
2. On note z_1, z_2, z_3 ces solutions de façon que :

$$\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2) < \operatorname{Im}(z_3);$$

on désigne par B, C, D leurs images respectives dans le plan complexe. On considère en outre le point A d'affixe $z_0 = 2 - i$.

- a. Placer les points A, B, C et D sur une figure.
 - b. Soit S la similitude directe plane qui transforme A en C et B en D. Donner, sous forme complexe, l'expression de cette similitude. Préciser le centre I, le rapport et l'angle de S .
 - c. Déterminer les images par S des points C et D.
3. Soit $H = S \circ S \circ S \circ S$ la composée de quatre similitudes identiques à S .
Préciser la nature de H et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

6 points

Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice (D).

1. On choisit un repère orthonormé (Ox, Oy) tel que F ait pour coordonnées $(2; 0)$ et (D) pour équation $x = -2$.
(Pour faire la figure on choisira une unité mesurant deux centimètres.)
Écrire une équation cartésienne de la parabole (P).
2. Soit m un réel donné et T le point de la parabole (P) d'ordonnée m et d'abscisse x .
 - a. Exprimer x en fonction de m .
 - b. Donner une équation de la tangente à (P) en T en fonction de m .
 - c. Montrer que, si T et T' sont des points distincts de (P) d'ordonnées respectives m et m' , les tangentes à (P) en T et T' sont sécantes; soit I leur point d'intersection; déterminer les coordonnées de I en fonction de m et m' .
3. m décrivant \mathbb{R} ,
 - a. Quel est l'ensemble des points I tels que les tangentes à (P), (IT) et (IT') soient orthogonales?

- b. Montrer que si (IT) et (IT') sont orthogonales, F appartient à la droite (TT'), (IF) est orthogonale à (TT') et que, K et K' étant les projections orthogonales de T et T' sur la droite (D), $IK = IK' = IF$. En déduire que K et F sont symétriques par rapport à la droite (IT).

PROBLÈME**9 points**

1. On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$y' + y = x + 1 \quad (\text{E}),$$

y étant une fonction réelle de la variable réelle x et y' sa dérivée.

- a. On pose $z = y - x$; écrire l'équation différentielle (F) satisfaite par z .
 b. Résoudre (F), puis (E).
 c. Trouver la solution de (E) qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x + e^{-x}.$$

- a. Étudier les variations de f
 b. En vue de construire la courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f dans un repère ortho-normé dont l'unité mesure 2 centimètres :
 — Montrer que (\mathcal{C}) possède une asymptote (x tendant vers $+\infty$) en donner une équation et préciser la position de (\mathcal{C}) par rapport à cette asymptote.
 — Construire les points de (\mathcal{C}) d'abscisses -1 et 0 et les tangentes à (\mathcal{C}) en ces points.
 c. Tracer la courbe (\mathcal{C}).
3. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}) et par les droites d'équations : $y = x$, $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un paramètre réel positif.
 a. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.
 b. L'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ tend-elle vers une limite quand λ tend vers l'infini? Si oui, laquelle?
4. On revient à l'équation différentielle (E) de la première question et on appelle y_α la solution de (E) telle que $y_\alpha(0) = \alpha$ et (\mathcal{C}_α) la courbe représentative de y_α où α est un paramètre réel donné.
 a. Étudier les variations de y_α et donner l'allure de (\mathcal{C}_α) dans les trois cas :

$$\alpha < 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha > 0.$$

- b. Montrer que, pour tout α , la tangente à (\mathcal{C}_α) au point d'abscisse -1 passe par l'origine des axes.
 c. Plus généralement, montrer que toutes les tangentes aux courbes (\mathcal{C}_α) en un point d'abscisse x_0 donnée se coupent sur (\mathcal{C}_α).