Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Pondichéry avril 1994 ∾

EXERCICE 1 **points**

Enseignement obligatoire

On considère, dans le plan orienté, un triangle OAB rectangle isocèle tel que :
OA = OB = a et $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Pour la figure, on prendra $a = 5$ cm.
On note I le milieu du segment [AB].
Soit M un point de la droite (OA), λ le réel tel que $\overrightarrow{M\text{A}} = \lambda\overrightarrow{\text{OA}}$ et soit N le point défini par $\overrightarrow{N\text{B}} = -\lambda\overrightarrow{\text{OB}}$.

1. Dans cette question, M est différent de A.
   a. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{N\text{B}}\right)$.
   b. On considère la rotation r qui transforme A en B et M en N.
   Préciser l'angle de cette rotation.
   Soit Ω son centre. Montrer que OAΩB est un carré.
2. On note J le milieu de [MN] et P le point tel que OMPN soit un rectangle.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s de centre Ω qui transforme M en J.
   b. Déterminer l'ensemble E des points J lorsque M décrit la droite (OA).
   En déduire l'ensemble F des points P lorsque M décrit la droite (OA). Représenter E et F.

EXERCICE 2 **points**

Enseignement obligatoire

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x} + x$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer h', puis h''.
   Déterminer le sens de variation de h', puis le signe de h'.
   En déduire les variations de h.
2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de h.
3. **a.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$. préciser l'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D) et leurs positions relatives.
   b. Préciser la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

PROBLÈME **points**

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x \qquad (E)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel,

$$xP'(x) - 3P(x) = 0.$$

2. Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par la relation $f(x) = x^3h(x)$.
   a. Calculer $h(1)$.
   b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.
   c. Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $\quad h'(x) = \dfrac{3}{x^4}\ln x$.
   d. On suppose que f vérifie la propriété (E).
   Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \displaystyle\int_1^x \dfrac{3}{t^4}\ln t\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.