∽ Baccalauréat C Pondichéry février 1960 ∾

I. - 1$^{\text{er}}$ sujet

Points conjugués par rapport à un cercle.
Polaire d'un point par rapport à un cercle : existence, construction, propriétés.

I. - 2$^{\text{e}}$ sujet

Représentation d'une droite par une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Coefficient angulaire.

I. - 3$^{\text{e}}$ sujet

Signification géométrique de la dérivée.
Application : Déterminer les points de la courbe d'équation

$$y = \frac{x-2}{x+2}$$

où la tangente est parallèle à l'une des bissectrices des axes.

II.
Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ tels que $\left(\text{O}x,\ \text{O}y\right) = +\dfrac{\pi}{2}$; on désigne par (Γ) le cercle de centre O et de rayon unité, par A et B les points de $x'\text{O}x$ respectivement définis par

$$\overline{\text{OA}} = -\overline{\text{OB}} = 1$$

et par C le point de (Γ) défini par $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Par la suite, on introduira la projection orthogonale H de C sur $x'\text{O}x$ et le point d'intersection T de la tangente à (Γ) en C avec $x'\text{O}x$.
M étant un point variable de $x'\text{O}x$, d'abscisse x, la droite CM recoupe (Γ) en un point P. On désigne par z le rapport $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{M\text{C}}}$.

1. Exprimer z en fonction du rapport $u = \dfrac{\overline{\text{C}P}}{\overline{\text{C}M}}$; montrer que la construction des points M de $(x'x)$ correspondant à une valeur donnée de z se ramène à l'intersection de (Γ) avec une parallèle à $x'\text{O}x$.
   Discuter le nombre de solutions selon la valeur de z.
   Dans le cas où le problème précédent admet deux solutions, M, M', déterminer les bissectrices de l'angle MCM' et montrer que les points M et M' sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes, I et J, que l'on déterminera.
2. Étudier géométriquement la limite de u quand x tend vers $\pm\infty$.
   En déduire celle de z.
   Préciser les valeurs numériques de z quand M est en A, B, O, H, T, I, J.
   Montrer que l'on a

$$z = \frac{\overline{M\text{A}} \cdot \overline{M\text{B}}}{\overline{M\text{C}}^2}$$

   et en déduire l'expression de z en fonction de x.

3. On désigne par $\theta = \left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{O}P}\right)$ l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{O}P}$ et par $\varphi = (\text{C}H,\ \text{C}M)$ l'angle des droites CH, CM.
Quelle relation y a-t-il entre θ et φ ?
Calculer tg φ en fonction de x ; en déduire l'expression de tg $\dfrac{\varphi}{2}$ et de $\sin\theta$; utiliser ce calcul pour retrouver l'expression de $z = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{M\text{C}}}$ en fonction de x.