Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry juin 1969

EXERCICE 1

On choisit comme unité de temps la seconde et comme unité de longueur le mètre.
Un point matériel est mobile sur un axe de manière que son accélération soit double de sa vitesse.
Au temps $t = 0$ il passe à l'origine des abscisses avec une vitesse $V_0 = -2$.
Former l'équation horaire du mouvement et tracer le diagramme des abscisses.

EXERCICE 2

On considère la fonction f qui au nombre réel x fait correspondre le nombre réel $y = f(x)$ tel que

$$y = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction et construire le graphe, (C), dans un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ (on prendra pour unité de longueur 2 cm).
2. Calculer en centimètres carrés l'aire, S, limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = a\,(a > 3)$.

   Donner le résultat en fonction de a et déterminer la limite de S quand $a \to +\infty$.

PROBLÈME

Dans le plan (II) rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, on donne les points particuliers suivants :
A, de coordonnées $(+1\,;\,0)$, B, de coordonnées $(-1\,;\,0)$, C, de coordonnées $(0\,;\,+1)$.
À tout nombre réel λ distinct de 1, on associe :

— sur $x'\mathrm{O}x$, le point M tel que $\dfrac{\overline{M\mathrm{A}}}{\overline{M\mathrm{B}}} = \lambda$,

— sur $y'\mathrm{O}y$, le point N tel que $\dfrac{\overline{N\mathrm{C}}}{\overline{N\mathrm{O}}} = \lambda$,

— dans (Π), le point P tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}P} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{\mathrm{O}N}$.

$\mathbb{R}$ désignant l'ensemble des nombres réels, on appelle f l'application de $\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \{1\}$ dans (Π) qui à λ fait correspondre le point P : P $= f(\lambda)$.

1. Exprimer les coordonnées, x et y, du point $P = f(\lambda)$ en fonction de λ.

   L'application f est-elle injective ?

   On appelle D le point correspondant au nombre 0 : D $= f(0)$. Montrer que l'image, (L), de $\mathbb{R}'$ par f, c'est-à-dire l'ensemble des points P correspondant à tous les nombres réels λ distincts de 1, est un sous-ensemble de la droite BD.

   Préciser quel est ce sous-ensemble.

   L'application f de $\mathbb{R}'$ sur (L) est-elle bijective ?
2. Soit ω le milieu du segment MN et K le milieu du segment OB. Déterminer l'ensemble (L$'$) des points ω quand λ varie dans R'.

   Caractériser l'ensemble des cercles (C_λ) de diamètre MN quand λ varie dans $\mathbb{R}'$.

3. On désigne par $\mathscr{F}$ le faisceau de cercles admettant pour points de base le point O et le point I, projection orthogonale de O sur la droite BD.
Soit $\mathscr{F}'$ le faisceau conjugué du faisceau $\mathscr{F}$.

a. Par un point M de l'axe $x'\text{O}x$ passe en général un cercle $\left(C'_\lambda\right)$ du faisceau $\mathscr{F}'$. Discuter l'existence de ce cercle.

On examinera le cas particulier où M est en K.

Le cercle $\left(C'_\lambda\right)$ recoupe le cercle (C_λ) au point M'. On fait correspondre à tout point du plan (Π), de coordonnées $(x\,;\,y)$, le nombre complexe $x+\text{i}y$, qui est son affixe. On désigne par z l'affixe de M, par z' celle de M', par α l'affixe de I.

Démontrer la relation

$$\frac{z}{z-\alpha} = \frac{-z'}{z'-\alpha}.$$

En déduire la relation $\left(z-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(z'-\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha^2}{4}$.

Si J est le milieu du segment OI, démontrer que OI est bissectrice de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\text{J}M}$ et $\overrightarrow{\text{J}M'}$ et que l'on a $\text{J}M \cdot \text{J}M' = \text{OJ}^2$.

b. Déterminer deux transformations ponctuelles élémentaires, T et T', telles que le produit $T \circ T'$ fasse correspondre au point M le point M'.

Ce produit est-il commutatif ? En déduire que l'ensemble des points M', quand λ varie dans $\mathbb{R}'$, est inclus dans un cercle, (Γ). Montrer que (Γ) est tangent à $x'\text{O}x$ au point O et préciser son centre et son rayon.

Quel est l'ensemble des points M' ?