

∞ Baccalauréat C Pondichéry avril 1971 ∞

EXERCICE 1

Déterminer le chiffre des unités des différentes puissances de 2, écrites dans le système décimal.

Répondre à la même question pour les puissances de 7.

Application : Déterminer le chiffre des unités du nombre

$$(3548)^9 \times (2537)^{31}.$$

EXERCICE 2

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels, \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à 2.

On considère l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui, à tout nombre réel x de \mathbb{R} associe le nombre réel y défini par

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 9}{x - 2}$$

Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} , que l'on définira.

Tracer dans un même plan rapporté à un repère orthonormé les représentations graphiques des applications f et f^{-1} .

PROBLÈME

On donne, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, le cercle (C) de centre O et de rayon a et la droite (D) d'équation $x = 2a$.

λ étant un nombre réel non nul quelconque ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$), on prend sur (D) les points M d'ordonnée λ et N d'ordonnée $-\frac{3a^2}{\lambda}$.

1.
 - a. Former l'équation du cercle (Γ) de diamètre MN.
Montrer qu'il est orthogonal à (C) et qu'il passe par deux points fixes quand λ varie dans $\mathbb{R} - \{0\}$.
 - b. Former l'équation des polaires de M et de N par rapport à (C).
Montrer qu'elles passent par un point fixe B quand λ varie, et préciser la position de B.
2.
 - a. (Δ) désignant la première bissectrice des axes, on appelle x et y les coordonnées d'un point m du plan xOy , x' et y' les coordonnées du symétrique m' de m par rapport à (Δ) et ($X_0 ; Y_0$) les coordonnées du symétrique M_0 de m' par rapport à l'axe $x'Ox$.
Exprimer X_0 et Y_0 en fonction de x et de y .
Par quelle transformation simple T_0 passe-t-on de m à M_0 ?
 - b. θ étant un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, on lui associe la transformation, T , du plan dans lui-même qui fait correspondre au point $m(x ; y)$ le point $M(X ; Y)$ tel que

$$\begin{cases} X &= x \sin \theta + y \cos \theta, \\ Y &= -x \cos \theta + y \sin \theta. \end{cases}$$

Déterminer le point double de T et reconnaître la transformation T parmi les types de transformations étudiés dans le programme.

Existe-t-il une valeur du paramètre θ ($\theta \in [0 ; 2\pi[$) telle que la transformation T qui lui est associée soit la transformation T_0 ?

- c.** Que deviennent le cercle (C), le cercle (T) et le point B dans la transformation T_0 ?
- 3.** Soit S la transformation du plan dans lui-même qui fait correspondre au point $m(x; y)$ le point P dont les coordonnées u et v sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u &= \frac{a}{2} + Y, \\ v &= \frac{a}{2} - X \end{cases}$$

- a.** Déterminer le point double de S et définir géométriquement cette transformation.
- b.** On désigne par $w = u + iv$ l'affixe du point P et par $z = x + iy$ l'affixe du point m .
Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que $w = \alpha z + \beta$ et retrouver les résultats de la question 3. a. précédente.
- c.** Le cercle (Γ) a pour transformé par S le cercle (Γ').
Déterminer les points fixes par lesquels passe le cercle (Γ') lorsque λ varie dans $\mathbb{R} - \{0\}$.