∽ Baccalauréat C Pondichéry mai 1981 ∾

EXERCICE 1

k étant un entier naturel quelconque, soit x et y les deux entiers tels que

$$\begin{array}{rcl} x &=& 7k^2+3k+1\\ y &=& 8k+3. \end{array}$$

1. Vérifier que $(x\,;\ y)$ est solution de l'équation

$$64x-(56k+3)y=55.$$

2. Quelles sont les valeurs possibles du P.G.C.D., d, de x et y ?
3. Montrer que d est égal à 55 si, et seulement si, 55 divise y.
   En déduire les valeurs de k pour lesquelles $d=55$.

EXERCICE 2

La suite numérique $(n \longmapsto u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de $u_0=0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0<u_n<1$ et que la suite est croissante.
2. On considère la suite $(n \longmapsto \mathcal{V}_n)$ définie par son terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{V}_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$$

   Montrer que la suite $(n \longmapsto \mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique convergente.
   Calculer u_n en fonction de n.
   En déduire que u_n converge et calculer sa limite.

PROBLÈME

Partie A

E est un espace vectoriel euclidien orienté, de base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\right)$, a est un nombre réel arbitraire et g_a désigne l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} a & 2a\\ a+1 & -a \end{pmatrix}$$

1. **a.** Préciser les valeurs de a pour lesquelles g_a n'est pas bijective.
   b. Quel est alors l'endomorphisme composé $g_a \circ g_a$?
   En déduire que l'espace image $\text{Im}\left(g_a\right)$ est inclus dans le noyau $\text{Ker}\left(g_a\right)$. Montrer que ces sous-espaces sont confondus.
   Préciser ce sous-espace pour chacune des valeurs de a trouvées au 1. a.

c. Montrer que g_0 est la composée $g_0 = r \circ p$ d'une projection vectorielle orthogonale que l'on précisera et de la rotation vectorielle r dont l'angle a pour mesure $+\dfrac{\pi}{2}$.

2. **a.** Montrer que g_1 est la composée d'une homothétie vectorielle h, de rapport positif, et d'une symétrie vectorielle orthogonale s que l'on précisera.

b. Montrer que g_1 est le seul automorphisme de E de la forme g_a qui transforme toute base orthonormée en une base orthogonale.

Existe-t-il une isométrie vectorielle de la forme g_a ?

3. **a.** Montrer que g^{-1}est involutive. Est-ce une symétrie vectorielle orthogonale ?

b. Pour quelles valeurs de a, g_a est-elle involutive ? Préciser les directions caractéristiques de chacune de ces involutions.

Partie B

La fonction numérique f est définie par

$$f(x) = \text{Log}\left(\text{e}^{-x} - \text{e}\right)$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et les limites aux bornes.
2. Étudier les variations de f.
3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan affine P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant 2 cm.

   Étudier les branches infinies de (C). Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C).

   Calculer l'abscisse du point A d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente (T) à (C) en A.

   Tracer la courbe (C).

Partie C

On appelle φ l'application affine de P laissant l'origine O invariante et admettant g^{-1} comme application linéaire associée.

1. Calculer les coordonnées $\left(x', y'\right)$ du point N' image par φ du point $N(x\,;\ y)$. Quelle est la nature géométrique de φ ?
2. On appelle (T) l'image de (C) par φ.

   Montrer que $M(x\,;\ y)$ appartient à (T) si, et seulement si,

   $$(1) \qquad \text{e}^{y} = \text{e}^{x+2y} - \text{e}.$$

3. Trouver la fonction numérique h_1 telle qu'une équation de (T) soit

   $$(2) \qquad y = h_1(x)$$

4. Trouver la fonction numérique h_2 telle qu'une équation de (T) soit

   $$(3) \qquad y = h_2(x)$$

   Quel est l'ensemble de définition de h_2 ?

   Étudier les limites

$$\ell_1 = \lim_{y \to +\infty} \left[h_2(y) + y\right]$$

$$\ell_2 = \lim_{y \to -\infty} \left[h_2(y) + 2y\right]$$

En déduire que (T) admet deux asymptotes obliques dont on donnera des équations.

5. Construire la courbe (T) en utilisant les résultats obtenus en C 1. et C 4.