∽ Baccalauréat C Pondichéry mai 1983 ∾

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(4\cos^3 x - 3\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

Une personne compose au hasard un numéro de téléphone à 6 chiffres (un cadran téléphonique comporte les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. la personne compose le numéro 11 03 50
   b. la personne compose un numéro de téléphone dont les chiffres sont tous distincts
   c. la personne compose un numéro dont les chiffres constituent une suite strictement croissante (par exemple, le 03 47 89).
2. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de chiffres 0 utilisés dans le numéro composé par cette personne.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

PROBLÈME (PARTIEL)

Partie II. (π) est un plan vectoriel euclidien de base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
F désigne l'ensemble des endomorphismes de (π) dont le noyau contient la droite vectorielle (D) de base $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
G désigne l'ensemble des endomorphismes de (π) ayant une image incluse dans (D).

1. Donner deux exemples démontrant que F et G ne sont pas vide.
2. Démontrer que, pour tout Φ de F et tout Ψde G, $\Psi \circ \Phi \in F \cap G$.
   Identifier $\Phi \circ \Psi$.
3. s étant la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{\imath}$ et r la rotation vectorielle d'angle droit direct, calculer $(s+r)\left(\vec{\imath}\right)$ et $(s+r)\left(\vec{\jmath}\right)$.
   En déduire que $s+r$ appartient à $F \cap G$. Déterminer le noyau et l'image de $s-r$.
4. E est l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Démontrer que Φ est élément de F si et seulement si sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ appartient à E.
   En déduire que F est le plan vectoriel de base (p, q), p et q ayant respectivement pour matrices A et B.
   Démontrer que Φ est élément de F si et seulement si sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ appartient à E.
   En déduire que F est le plan vectoriel de base (p, q), p et q ayant respectivement pour matrices A et B.

5. Caractériser géométriquement p et $-q$.

Partie III. P est un plan affine associé à (π) de repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit f l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x \end{array}\right.$$

Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est la somme de p et d'une projection vectorielle Ψ appartenant à l'ensemble G de la partie II dont on précisera les éléments.

En remarquant que le point O est invariant par f, donner une construction de M' à partir de M.

Démontrer que f est bijective.

2. Soit h_1 et h_2 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$h_1(x) = 2x + \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \quad ; \quad h_2(x) = 2x - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

On désigne par C_1 et C_2 leurs représentations graphiques respectives.

a. Étudier les variations de h_1. Tracer C_1 dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Démontrer que C_1 et C_2 sont symétriques par rapport au point O. Tracer C_2.

b. Soit C la réunion de C_1 et C_2. Démontrer quer l'image de C par f est une conique dont on déterminera les éléments. Tracer cette conique.