Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry mai 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Soit O un point du plan orienté. À chaque point M du plan on associéé le point G défini de la façon suivante :

— Si M est en O, G est en O ;

— Si M est distinct de O, on considère le triangle OMM' rectangle en M tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\text{O}M},\ \overrightarrow{\text{O}M'}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Le point G est alors le centre de gravité du triangle OMM'.

1. Montrer que si M est distinct de O,

a. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\text{O}M},\ \overrightarrow{\text{O}G}}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

b. $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{\text{O}M},\ \overrightarrow{\text{O}G}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c. $\dfrac{\text{O}G}{\text{O}M} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

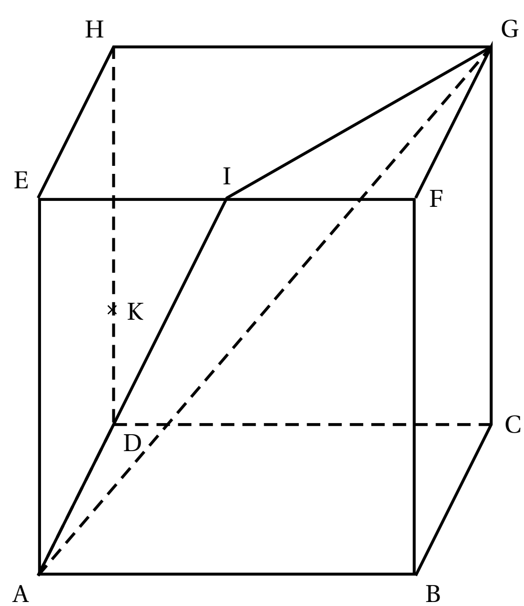
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S du plan qui à chaque point M associe G.

3. Soit D une droite ne passant pas par O. On suppose que M décrit D.

a. Quel est le lieu L du point G quand M décrit D ?

b. Indiquer une construction géométrique de L.

EXERCICE 2 **4 points**



Soit le cube ABCDEFGH représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

1. **a.** Vérifier que $\overrightarrow{\text{BK}} = \overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}}$.
   b. En déduire l'aire du triangle IGA.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan AIG

PROBLÈME **4 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $R = \left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{x-1} - 1.$$

Le but du problème est de trouver une approximation de l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$.
Les parties B et C sont indépendantes.

A.

On se propose d'étudier la fonction f et les solutions de l'équation $f(x) = x$

1. Établir le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative C dans le repère R.
2. On pose $\varphi(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. Dresser le tableau de variation de φ et démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions qu'on notera a et b ($a < b$).
   c. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet comme seules solutions a et b et établir que : $2 < b < \dfrac{5}{2}$.

B.

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre b .

Pour ce faire on introduit les deux suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définies comme suit :
$u_0 = 2$; $v_0 = \dfrac{5}{2}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:
Si $\varphi\left(\dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}\right) \geqslant 0$, alors $u_n = u_{n-1}$ et $v_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$,
Si $\varphi\left(\dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}\right) \geqslant 0$, alors $u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$ et $v_n = v_{n-1}$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Soit $\text{I} = \left[2\,;\ \dfrac{5}{2}\right]$. Montrer en raisonnant par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont éléments de I.
3. En utilisant le tableau de variation de la fonction φ sur l'intervalle I et en raisonnant par récurrence, montrer que (u_n) est majorée par b et que (v_n) est minorée par b.
4. Établir que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Que peut-on en conclure ?

5. Démontrer par récurrence que :

$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

6. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers b.

7. Déterminer un entier positif p, tel que v_p soit une valeur approchée à 10^{-1} près par excès de b. Calculer v_p.

C.

On se propose d'étudier une autre méthode d'approximation du nombre b .

Soit la fonction g définie sur $\mathrm{I} = \left[2\,;\,\frac{5}{2}\right]$ par :

$$g(x) = \ln(x+1) + 1.$$

1. Montrer que, sur I, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout élément x de I, $g(x)$ appartient à I.

b. Montrer que pour tout élément x de I : $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

c. En déduire que, pour tout élément x de I :

$$|g(x) - b| \leqslant \frac{1}{3}|x - b|.$$

3. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'éléments de I définie par :

$$w_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant 1,\ w_n = g\left(w_{n-1}\right).$$

a. Établir que pour tout $n \geqslant 0$:

$$|w_n - b| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

En déduire la limite de (w_n).

b. Déterminer un entier q tel que w_q soit une valeur approchée de b à 10^{-2} près par défaut. Calculer w_q.

4. Comparer le nombre de pas respectifs à effectuer pour obtenir une valeur approchée de b à la précision 10^{-8}, pour la méthode du B et pour la méthode du C.