↫ Baccalauréat ES Pondichéry mars 1996 ↬

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour étudier la progression d'une épidémie de grippe, une enquête est faite auprès d'un échantillon de 1 000 personnes; le tableau ci-dessous donne le nombre $N(t)$ d'individus ayant été contaminés, à la date t, exprimée en jours.

t	1	2	5	10	15	20
$N(t)$	88	172	306	420	485	500

On considère qu'après 20 jours l'épidémie est terminée, c'est-à-dire que le nombre total de personnes ayant été contaminées ne varie plus.
Dans ce problème, on utilisera, pour les calculs statistiques, les fonctions de la calculatrice (le détail de ces calculs n'est pas demandé).

1. **a.** Dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, pLacer le points de coordonnées $(t\ ;\ N(t))$ (unités graphiques : 0,5 cm pour 1 jour en abscisse, 1 cm pour 50 individus en ordonnée).

   b. Donner à 10^{-2} près la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double donnée dans le tableau.

   Un ajustement affine est-il envisageable?

   c. Déterminer une équation de la droite de régression de N en t et la tracer. Les coefficients seront donnés à 1 près.

2. On considère la fonction définie sur $[0\,;40]$ par

$$f(t) = 500\left(1 - \text{e}^{-0,2t}\right).$$

   a. Recopier et compléter le tableau suivant (les résultats seront donné à 1 près).

t	1	2	5	10	15	20	30	50
$f(t)$								

   b. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent.

   c. Déterminer graphiquement quelle est, de la droite de la première question ou de la courbe précédente, celle qui ajuste le mieux le nuage et l'utiliser pour indiquer la date à laquelle le quart de la population étudiée a déjà été atteint.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On considère la fonction f définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(ax + b) + 2 - x,$$

où a et b sont deux réels qui seront déterminés dans la question 1.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Sachant que $f(-1) = 3$ et que $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$, calculer a et b.

2. Montrer que la fonction $G\ :\ x \longmapsto \left(x + \dfrac{3}{2}\right)\ln(2x + 3) - x$ est une primitive sur $[-1\ ;\ +\infty[$ de la fonction $g\ :\ x \longmapsto \ln(2x + 3)$.

3. En observant que $f(x) = g(x) + 2 - x$ pour $x \in [-1~;~+\infty[$, calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans son troupeau, un berger possède deux races de brebis, A et B. La race A est représentée dans la proportion de 40 %. Une étude sur la fécondité des races A et B a montré qu'en moyenne :

67,5 % des brebis A ont un agneau ;

30 % des brebis A ont deux agneaux ;

2,5 % des brebis A sont stériles ;

55 % des brebis B ont un agneau ;

40 % des brebis B ont deux agneaux ;

5 % des brebis B sont stériles.

On suppose que le nombre de brebis du troupeau est suffisamment grand pour que le fait de prélever une brebis ne change pas la proportion des brebis A et B.

1. On choisit une brebis au hasard. Montrer que la probabilité pour qu'elle soit stérile est 0,04.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à une brebis, associe le nombre d'agneaux qu'elle produit.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   c. Si le troupeau comprend 1 000 brebis, combien d'agneaux peut espérer le berger ?
3. Un acheteur choisit 12 brebis au hasard.
   a. Quelle est la probabilité pour que, sur ces 12 brebis, 3 exactement soient stériles ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'aucune ne soit stérile ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

PROBLÈME **11 points**

Une étude effectuée sur un certain produit a montré que, lorsqu'il est au prix p, exprimé en francs, la demande $f(p)$ pour ce produit est donné par

$$f(p) = \frac{10^5 \times p}{p^2 - 100}, \text{ avec } p \in [11~;~+\infty[.$$

Partie A

1. Calculer La demande pour Les valeurs suivantes : $p = 11$; $p = 15$; $p = 90$ (arrondir, si nécessaire, à L'unité près).
2. a. Vérifier que $f(p) > 0$ pour tout p de $[11~;~+\infty[$.
   b. Montrer que f est une fonction décroissante sur $[11~;~+\infty[$.
3. On suppose que Le prix p, initialement égal à 15 F, subit une augmentation de 1 %.
   a. Calculer le nouveau prix p', ainsi que la demande correspondant à ce prix, arrondie à l'unité près.
   b. En déduire le pourcentage de variation de la demande, consécutive à l'augmentation de prix.

Partie B

On pose $g(p) = \ln[f(p)]$ pour $p \in [11~;~+\infty[$. On appelle « élasticité » de la demande par rapport au prix p, le nombre $E(p) = pg'(p)$, où $p \in [11~;~+\infty[$. On admettra que ce réel donne une bonne approximation du pourcentage de variation de la demande, pour une augmentation de 1 % d'un prix donné.

1. **a.** Quel est le signe de $E(p)$ pour $p \in [11~;~+\infty[$? Justifier la réponse et interpréter ce résultat.

   b. Établir l'égalité $E(p) = 1 - \dfrac{2p^2}{p^2 - 100}$.

2. **a.** Étudier la limite suivante : $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} E(p)$.

   b. Calculer $E'(p)$ où E' désigne la dérivée de E, et en déduire le tableau de variations de E.

   c. Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de $-1,25$.

   d. Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 F à 30,30 F ?