

∞ Baccalauréat S Pondichéry mai 2001 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx.$$

- a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
- b. Prouver que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

- c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle  $(a_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $a_1 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n.$$

- b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

EXERCICE 2

4 points

On considère l'application  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2-iz}{1-z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de  $f$ .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions 1 et 2.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe  $-2i$ .

- 1. On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

Écrire  $f(z)$  sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $f(z)$  soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose  $z' = f(z)$ .
- Vérifier que  $i$  n'a pas d'antécédent par  $f$  et exprimer, pour  $z'$  différent de  $i$ ,  $z$  en fonction de  $z'$ .
  - $M$  est le point d'affixe  $z$  ( $z$  différent de 1) et  $M'$  celui d'affixe  $z'$  ( $z'$  différent de  $i$ ).  
Montrer que  $OM = \frac{M'C}{M'D}$  où  $C$  et  $D$  sont les points d'affixes respectives 2 et  $i$ .
  - Montrer que, lorsque le point  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 privé du point  $A$ , son image  $M'$  appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.
  - Montrer que, si  $M$  est un point de l'axe des réels, différent de  $O$  et de  $A$ , alors  $M'$  appartient à la droite  $(CD)$ .

**EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ)****4 points**

1. On considère l'équation (1) d'inconnue  $(n, m)$  élément de  $\mathbb{Z}^2$  :

$$11n - 24m = 1.$$

- Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
  - En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
  - Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. recherche du P. G. C. D. de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .
- Justifier que 9 divise  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .
  - $(n, m)$  désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

- Montrer que  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11n} - 1$ .  
(on rappelle l'égalité  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$ , valable pour tout entier naturel  $n$  non nul).  
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers  $N$  et  $M$  tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

- Montrer que tout diviseur commun à  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$  divise 9.
- Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de  $10^{24} - 1$  et  $10^{11} - 1$ .

**PROBLÈME****12 points**

Dans tout le problème,  $(\mathcal{C})$  désigne la courbe d'équation  $y = \ln x$  représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine  $O$  et d'unité graphique 4 cm.

*Question préliminaire* : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et la droite (D) d'équation  $y = x$ .

### Partie A

1. a. Déterminer une équation de la tangente ( $\Delta$ ) à ( $\mathcal{C}$ ) au point I d'abscisse 1.
- b. Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

- c. En déduire la position de ( $\mathcal{C}$ ) par rapport à  $\Delta$ .
2. a. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par  $x - \ln x$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- b.  $M$  et  $N$  sont les points de même abscisse  $x$  des courbes ( $\mathcal{C}$ ) et (D) respectivement. Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance  $MN$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

1. Soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe ( $\mathcal{C}$ ). Exprimer la distance  $OM$  de l'origine à  $M$  en fonction de  $x$ .
2. Étude de la fonction auxiliaire  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^2 + \ln x$ .
  - a. Justifier les limites de  $u(x)$  en 0 et en  $+\infty$  ainsi que le sens de variations de  $u$ .
  - b. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  et un seul tel que  $u(\alpha) = 0$ .  
Montrer que  $\alpha$  est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - c. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant la valeur de  $x$ .
3. Étude de la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$ .  
Calculer  $g'(x)$  et vérifier que  $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$ .  
En déduire le tableau de variations de  $g$ .
4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour  $\alpha$  la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question 2. b.
5. A étant le point d'abscisse  $\alpha$  de ( $\mathcal{C}$ ), démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

### Partie C Étude d'une suite

1. Montrer que le réel  $\alpha$  défini dans la partie B est solution de l'équation  $h(x) = x$ , où  $h$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x).$$

2. a. Calculer  $h'(x)$  et étudier son signe sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ .

- b. Prouver que  $h\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .
- c. Calculer  $h''(x)$  et étudier son signe sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .
- d. En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ , on a

$$0 \leq h'(x) \leq 0,3.$$

3. On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ , et que la suite  $v$  est décroissante.
- b. *Attention, cette question n'est plus au nouveau programme du baccalauréat S.*  
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3|u_n - \alpha|$  puis que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$ .
- c. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .
- d. Déterminer un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près et indiquer la valeur de  $u_{n_0}$  donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).