Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

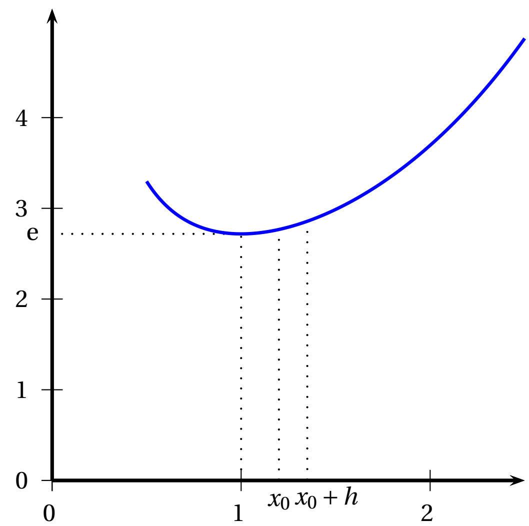
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

   e. Conclure.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On désigne par I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 - 2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\mathrm{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{3+9\text{i}}{4+2\text{i}}$.
   Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.
3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega\text{I}}, \overrightarrow{\Omega\text{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
   a. Préciser le module et un argument de $z_{\text{E}} + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $z_{\text{E}} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\text{i}$.
4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z' + \frac{1}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$
   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
   b. Soit K le point d'affixe $z_{\text{K}} = 2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :
$$z' = \frac{3+4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\text{i}}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' & = & \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{array}\right.$
2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3~;~4~;~-2)$.
Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{I}G}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}.$$

a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.