Baccalauréat S Pondichéry avril 1998

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
   On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
   c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
   d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?
2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
   On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   On considère les évènements suivants :
   R : « Les trois boules tirées sont rouges »
   D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
   B : la boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement R.
   b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
   c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(\text{B})$ de l'évènement B sachant que l'évènement D est réalisé.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère le polynôme $\text{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$\text{P}(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 20\right).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{P}(z) = 0$.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\text{i}$, $n = -2 - 4\text{i}$, $p = 2 + 3\text{i}$ et $q = 2 - 3\text{i}$.
4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z - p}{z - m} = \text{i}$. Placer son image K.
   b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.
4. **a.** Déterminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
   b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
   c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 4 cm, on note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i, (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (D) la droite d'équation $y = 1$.
À tout point M du plan, d'affixe z distincte de i, on associe le point M' d'affixe z', telle que

$$z' = \frac{z - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, avec z distinct de i, tels que $z' = 1$.
2. **a.** Montrer que, pour tout z distinct de i, $z'\overline{z'} = 1$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.

   b. Montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à la droite (D), $\dfrac{z'-1}{z-\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur.
   En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

   c. Déduire des questions 2. a. et b. une construction du point M' lorsque M est un point non situé sur la droite (D).
   Préciser la position du point M' lorsque M appartient à la droite (D) privée du point B.
3. **a.** Soit P un point du cercle (C), distinct du point A.
   En utilisant la question 2. b., représenter l'ensemble E des points M tels que $M' = \mathrm{P}$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

   c. En utilisant ce qui précède, et sans aucun calcul, représenter l'ensemble F des points M dont les affixes z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right)^3 = 1$.

Problème **11 points**

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

⋆ **étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0~;~+\infty[$.
   On note α cette solution.

   a. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$**

1. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\mathrm{e}^{-x}}$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. **a.** Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. **a.** Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^{x}+1} \quad \text{avec } u(x) = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathscr{C}$ et (T).

Partie C

$\star$ **Calcul d'aire et étude d'une suite**

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B. 2.**

2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire $\mathscr{A}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

b. Interpréter graphiquement v_n.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

d. Déterminer la limite de la suite (v_n).