∾ Baccalauréat S Pondichéry avril 2003 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2-u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

  a. Calculer u_1 et u_2.

  b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \mapsto x(2-x)$.

  c. Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;\,1[$.

  a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

  b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

  c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

  a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

  b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

  c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$\text{(E)} \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = 0$, où $a,\ b$ et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2-2\text{i},\ z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2+2\text{i}.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.
   b. Placer les points E et F.
4. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \text{i}$.
   b. En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Première partie
ABC est un triangle direct du plan orienté.
On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].
Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.
d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.
d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.
A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
A - Construction de la figure

1. Placer les points $A(-4-6\text{i})$, $B(14)$, $C(-4+6\text{i})$, $A_1(3-7\text{i})$, $B_1(9+5\text{i})$ et $C_1(-3-\text{i})$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right)$.
   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$

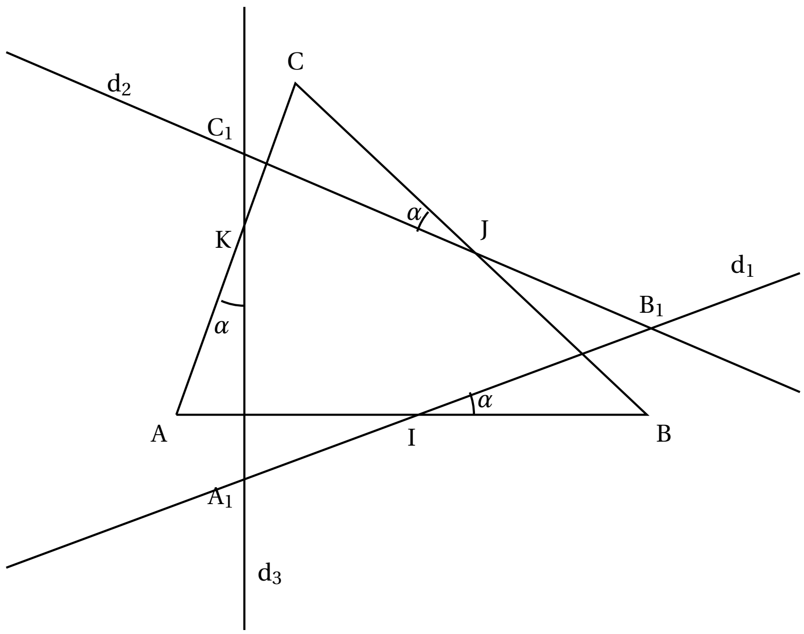
On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right)z + 2 - 2\text{i}$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.
2. **a.** Déterminer le rapport et l'angle de s.

b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

3. Que représente le point Ω pour ABC ?

Le candidat joindra cette figure à sa copie

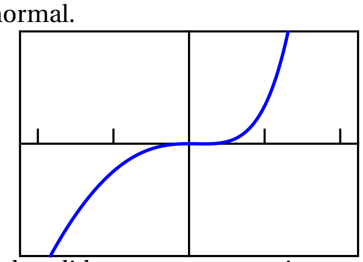


PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

a. le sens de variations de f sur $[-3\,;\,2]$?

b. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

c. En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.

e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variations de la fonction f.

c. Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

a. Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0; 1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0; 1]$.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.

b. Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[-0,2 ; 0,4]$, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec les unités suivantes :

— sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05.
— sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \times 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto x^2\text{e}^x.$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ puis en donner une valeur approchée en cm^2.