Durée : 4 heures

Baccalauréat S Pondichéry juin 1995

Exercice 1 **4 points**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

On note f l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

On a donc aussi $z' = \dfrac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que O, M et M' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f.
   Vérifier que l'ensemble Γ contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i.
3. Soient $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB], E le milieu de [AB] et $\text{E}' = f(\text{E})$.
   Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
   Montrer que E$'$ appartient à $\mathscr{C}$.
4. Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB), on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f.
   a. Déterminer une équation de la droite (AB).
   On pose $k = \text{O}M^2$, $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ avec x, y, x', y' réels.
   Exprimer k en fonction de x.
   Montrer que M' appartient à $\mathscr{C}$ (on pourra exprimer x' et y' en fonction de x et k).
   b. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen.
L'examinateur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

1. Dans cette question, on suppose que l'examinateur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.
   On désigne par F_1 l'évènement : « le premier candidat interrogé est une fille », et par F_2 l'évènement : « le deuxième candidat interrogé est une fille ».
   a. Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles ?

b. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?

c. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?

2. On suppose maintenant que l'examinateur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané de quatre noms. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle en B, tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi.$$

On prendra AB = 5 cm pour la figure.
Soient I le milieu de [AB], E le milieu de [AC] et J le milieu de [EC].

1. Montrer qu'il existe une rotation r transformant A en E et transformant B en C.

Quel est son angle ?

Construire son centre O en justifiant la construction.

Dans la suite de l'exercice, k désigne un nombre réel, M et M' sont les points définis par $\overrightarrow{\text{A}M} = k\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{E}M'} = k\overrightarrow{\text{EC}}$.

2. a. Préciser la position de M et de M' pour $k = 0$, $k = \dfrac{1}{2}$ et $k = 2$.

Le réel k est désormais quelconque.

b. Montrer que $M' = r(M)$.

En déduire la nature du triangle OMM'.

c. Montrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

3. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a. Montrer que N est l'image de M par une similitude directe de centre O dont on précisera l'angle et le rapport.

b. Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB) ?

Construire cet ensemble.

PROBLÈME **11 points**
Enseignement de spécialité

La partie A de ce problème a pour objet la résolution d'une équation différentielle du second ordre. Les parties B et C sont consacrées à l'étude de fonctions.
Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad (1)$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution de l'équation (1) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

Partie B

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

1. **a.** Étudier le sens de variation de f.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

   Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

   d. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions réelles.

   On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).

   Montrer que α appartient à l'intervalle $\left]-1 ; -\dfrac{1}{2}\right[$.

   Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près par défaut en justifiant la méthode employée.

2. **a.** Tracer $\mathscr{C}$ en faisant apparaître graphiquement tous les résultats obtenus dans la question partie B. 1.

   b. Soit λ un réel positif. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie C

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal ci-joint.
Lorsque $k = 1$, on retrouve la fonction f étudiée dans la partie B, c'est-à-dire que dans ce cas $f_1 = f$ et $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}$.

1. **a.** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b. Déterminer par le calcul les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

   Vérifier que, pour tout entier relatif k, la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par ces points.

2. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $(x+1)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)$.

   En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_k$ et de $\mathscr{C}_{k+1}$.

3. On suppose que k est non nul.

   a. Calculer $f_k'(x)$ pour tout x réel.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f_k, (distinguer les cas : $k > 0$ et $k < 0$).

   c. On a représenté sur le graphique ci-joint quatre courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ correspondant à quatre valeurs différentes de k.

   Identifier ces valeurs, en justifiant la réponse.