∽ Baccalauréat S Pondichéry avril 1997 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Une urne contient 9 boules (4 rouges, 2 bleues et 3 vertes) identiques au toucher. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur (on donnera le résultat sous forme d'une fraction).
2. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; puis on tire une seconde boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur (on donnera le résultat sous forme d'une fraction).
3. On adopte la règle suivante : soit n un entier naturel non nul ; on gagne $10n$ francs si les deux boules tirées sont de la même couleur et on perd n^2 francs dans le cas contraire.

   On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à tout tirage de deux boules de l'urne selon le procédé décrit dans la première question (respectivement la deuxième question), associe le gain algébrique réalisé à l'issue du tirage.

   Les variables aléatoires X et Y prennent donc les valeurs $10n$ et n^2.

   a. Déterminer les espérances mathématiques E(X) et E(Y) des variables aléatoires X et Y.

   b. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n telles que
   $E(X) < 0 < E(Y)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Soit P le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On désigne par P^* le plan P privé de l'origine O, et on considère l'application f de P^* vers P^* qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{4}{z}.$$

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Montrer que f a deux points invariants A et B dont on calculera les affixes (A est le point d'abscisse positive).
2. On nomme C et D les points d'affixes respectives $c = 2 + 2\text{i}$ et $d = 2 - 2\text{i}$.

   a. Calculer les affixes c' et d' des points C$'$ et D$'$, images de C et D par f.

   b. Donner d'écriture trigonométrique de c' et d'.

   c. Montrer que OC$'$AD$'$ est un carré.
3. On désigne par Γ^* le cercle de centre A et de rayon 2, privé de l'origine.

   On considère un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z'.

   a. Montrer que M appartient à Γ^* si et seulement si $z \neq 0$ et $|z - 2| = 2$.

b. Montrer que si M appartient à Γ^* alors $|z'-2| = \dfrac{4}{|z|}$.
En déduire que l'image d'un point de Γ^* est un point de la médiatrice de [OA].

c. En exprimant $\arg z'$ en fonction de $\arg z$, montrer que les demi-droites [OM) et [OM') sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

d. Déduire de ce qui précède la construction géométrique de l'image M' d'un point M quelconque de Γ^*.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Soit P le plan rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
On désigne par P* le plan P privé de l'origine O et on considère l'application f de P* vers P* qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{4}{z}.$$

1. Montrer que f a deux points invariants A et B dont on calculera les affixes (on désignera par A celui dont l'abscisse est positive).
2. **a.** Exprimer un argument de z' en fonction d'un argument de z.
   Que peut-on en déduire pour les demi-droites [OM] et [OM'] ?

   b. Comparer les arguments des nombres $\dfrac{z'+2}{z'-2}$ et $\dfrac{z+2}{z-2}$.
   En déduire que les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés.

   c. Indiquer une construction géométrique de M' connaissant M.
   Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 4.
3. Montrer que lorsque M décrit le cercle Γ, le point M' décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit Q le milieu de $[MM']$.

   a. Calculer l'affixe q de Q en fonction de l'affixe z de M.

   b. On pose $z = x+\text{i}y$ et $q = \alpha+\beta\text{i}$ où x, y, α et β sont réels.
   Exprimer α et β en fonction de x et de y.

   c. Montrer que lorsque M parcourt le cercle Γ, le point Q appartient à une conique dont on précisera la nature, l'excentricité, les sommets et les foyers.

PROBLÈME — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\text{e}^x+1}{\text{e}^x+1}$$

On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$; unité graphique 2 cm.

Partie A - Étude et représentation graphique de la fonction f

1. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(-x)+f(x)=2$.
   En déduire que Γ possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra par exemple utiliser 1. a. ou poser $X=\mathrm{e}^x$.) En déduire que Γ possède deux asymptotes dont on précisera les équations.

   c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

   b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=f(x)-(x+1)$.
   Montrer que, pour tout réel x, $\varphi'(x)=-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2$.
   En déduire le sens de variation de la fonction φ puis son signe (on précisera $\varphi(0)$).

   c. Déduire de ce qui précède la position de la courbe Γ par rapport à la droite T.

3. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la droite T ainsi que la courbe Γ et ses asymptotes.

Partie B - Calcul d'aire

1. **a.** Montrer que $f(x)=x$ si et seulement si $\varphi(x)=-1$.

   b. En déduire, en utilisant les résultats de A 2., que la droite D d'équation $y=x$ coupe la courbe Γ en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Exprimer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par la courbe Γ, la droite D et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Partie C - Approximation du réel α au moyen d'une suite

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2\,;\,3]$.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=4\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}-\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right)$.

   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I,
   $\left|f'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

   c. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I,
   $|f(x)-f(\alpha)|\leqslant\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

2. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}. \end{array}\right.$$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^n}|3-\alpha|$.
   Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Donner la valeur approchée de u_p proposée par la calculatrice.