∽ Pondichéry Baccalauréat mathématiques juin 1957 ∽

I. 1^er^ sujet

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
On se bornera à exposer cette question sur l'exemple suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m^2x+y &=& 1,\\ x+m^2y &=& m,\end{array}\right.$$

m désignant un paramètre.

I. 2^e^ sujet

Étude des variations de la fonction

$$y=\frac{x^2+6x+8}{x(x-2)}.$$

Représentation graphique de cette fonction.

I. 3^e^ sujet

Notion de fonction primitive d'une fonction donnée.
Application au calcul de l'aire limitée par l'axe $x'\mathrm{O}x$, les parallèles à $y'\mathrm{O}y$ d'abscisses respectives a et x, et la courbe représentative de la fonction $y=f(x)$, cette fonction étant définie, positive, croissante dans l'intervalle $(a~;~b)$ et x étant dans cet intervalle.

II.

Étant données deux droites $u'\mathrm{O}u$, $v'\mathrm{O}v$ se coupant en O, on désigne par $2\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ l'angle des deux demi-droites Ou, Ov, par $x'\mathrm{O}x$ la bissectrice de cet angle et de l'angle opposé par le sommet, par (P) le plan perpendiculaire au plan $u\mathrm{O}v$ le long de $x'\mathrm{O}x$.

1. Une sphère variable (S), de rayon *constant* R, reste tangente aux deux droites $u'\mathrm{O}u$, $v'\mathrm{O}v$, et son centre I reste dans le plan (P).

   Trouver dans ces conditions le lieu (E) de I. (On pourra, par exemple, chercher la relation gui lie les coordonnées x et y de I par rapport au système d'axes constitué, dans le plan (P), par $x'\mathrm{O}x$ et par la perpendiculaire $y'\mathrm{O}y$ élevée en O au plan $u\mathrm{O}v$).

   Le grand cercle de (S) dont le plan est perpendiculaire à $x'\mathrm{O}x$ perce le plan $u\mathrm{O}v$ en deux points, M et N, dont on demande le lieu géométrique lorsque (S) varie comme il est dit ci-dessus.
2. Un cercle (C) variable, de rayon constant R, rencontre constamment les deux droites fixes $u'\mathrm{O}u$, $v'\mathrm{O}v$ le plan de ce cercle reste perpendiculaire à $x'\mathrm{O}x$. Trouver dans ces conditions le lieu (E$'$) de son centre J.
3. Évaluer l'aire A de la portion de (P) comprise entre les deux courbes (E) et (E$'$).

   Comment varie cette aire lorsque α varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$?

   Montrer que, pour toute valeur de α dans cet intervalle, les points où (E$'$) coupe $x'\mathrm{O}x$ occupent par rapport à (E) des positions remarquables, que l'on précisera.
4. On donne dans le plan $u\mathrm{O}v$ une droite Δ perpendiculaire à $x'\mathrm{O}x$ au point T d'abscisse $\overline{\mathrm{OT}}=\lambda\mathrm{R}$, $(\lambda\geqslant 0)$ et l'on désigne par (Q) l'un des deux plans qui passent par Δ et qui font avec le plan $u\mathrm{O}v$ un angle φ donné

$$\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Déterminer les sphères (S) du **1.** qui sont tangentes au plan (Q).
Discuter en prenant λ comme paramètre et en supposant R, α, φ constants.

Application numérique : $\text{cotg}\,\alpha = 4$, $\sin\varphi = \dfrac{3}{5}$.