Baccalauréat mathématiques élémentaires Pondichéry juin 1964

I.

1. Le plan étant rapporté à deux axes orthonormés, par quelle transformation ponctuelle la courbe d'équation $y = a^x$ se déduit-elle de la courbe d'équation
$$y = \log_{\frac{1}{a}} x \qquad (a > 0)\ ?$$
2. Soit $P(z) = z^4 + z^3 + az^2 + bz + 10$ un polynôme de la variable z, où les coefficients a et b sont réels.
Calculer a et b, sachant que $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ est racine de l'équation $P(z) = 0$.

II.

Partie A

1. Vérifier que le polynôme $x^2 - 3x - 2$ est divisible par $x + 1$.
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
Étudier ses variations et tracer son graphique $(\mathscr{C}_1)$ en axes orthonormés.
On précisera les points où la tangente est parallèle à $x'\mathrm{O}x$, les asymptotes, les points de rencontre éventuels avec les asymptotes, le ou les points d'inflexion.
3. Calculer l'aire $S(x)$ du domaine limité par $(\mathscr{C}_1)$, son asymptote oblique et les deux parallèles à $y'\mathrm{O}y$ d'abscisses x et $x + 1$, x étant supérieur à 1.
Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère maintenant la fonction
$$f_p(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{p}{x^2}.$$
où p est un nombre réel.
Vérifier que $y = f_p(x)$ et $y' = f_p'(x)$ satisfont à la relation $x^2y' + 2xy = 3x^2 + 3$.

1. Discuter, suivant la valeur de p, le nombre de points du graphique, $\left(\mathscr{C}_p\right)$, de $f_p(x)$ en lesquels la tangente est parallèle à $x'\mathrm{O}x$.
2. Construire le lieu (L) de ces points lorsque p varie.
3. Quelle transformation permet de déduire la courbe $\left(\mathscr{C}_{-p}\right)$ de la courbe $\left(\mathscr{C}_p\right)$; on pourra, pour cela, comparer $f_p(x)$ et $f_{-p}(-x)$.
Indiquer la forme de $\left(\mathscr{C}_{-p}\right)$ lorsque $0 < p < 1$ et lorsque $p > 1$.