

♻ Baccalauréat Pondichéry juin 1966 ♻
série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

I.

Déterminer tous les nombres écrits dans le système décimal au moyen de quatre chiffres $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$), multiples de 5 et tels que les trois nombres c , $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ soient, dans cet ordre, en progression géométrique.

II.

Dans un plan orienté, on donne deux repères orthonormés fixes, déterminés par les axes $u'Ou$ et $v'Ov$, pour l'un, $x'Ox$ et $y'Oy$ pour l'autre, tels que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov}) &= (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Oy}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ox}) &= \theta + 2k\pi, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (\theta \text{ constant}). \end{aligned}$$

On désigne par (C) le cercle de centre 0, de rayon 1.

Un point H, d'abscisse $\overline{OH} = \lambda$, est variable sur $u'Ox$.

La perpendiculaire en H à $u'Ou$ coupe $x'Ox$ en P.

Soit P' le pied de la polaire de P par rapport à (C).

1. Calculer la mesure algébrique, $z = \overline{P'P}$, du vecteur $\overrightarrow{P'P}$ sur l'axe $x'Ox$, puis sa longueur, $r = P'P$, en fonction de λ et θ .

Étudier les variations de z quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

En déduire les variations de r .

Construire les courbes (Γ) et (Γ') représentant les variations de z et de r .

Montrer que la courbe représentative des variations de r possède un axe de symétrie.

Combien y a-t-il de points H tels que $\overrightarrow{P'P}$ ait une longueur donnée?

2. Soit I le milieu de $P'P$ et ω sa projection orthogonale sur Ou .

- a. Établir la relation

$$IO^2 - IH^2 = \overline{OH}(2\overline{O\omega} - OH).$$

En déduire que $IO^2 - IH^2$ s'exprime simplement en fonction de θ .

- b. Soit A le point d'intersection, d'abscisse positive, de $x'Ox$ et du cercle (C). On projette orthogonalement A en A' sur PH.

Les perpendiculaires en P et P' à $x'Ox$ coupent $u'Ou$ en p et p' respectivement.

Montrer que le cercle (C), le cercle (H) de centre H de rayon HA' et les cercles (p) et (p') , de centres p et p' , tangents à $z'Oz$, font partie d'un même faisceau.

Discuter la nature de ce faisceau suivant les valeurs de λ .

3. La polaire de P par rapport à (C) et la parallèle à $u'Ou$ passant par P se coupent en M. Déterminer en fonction de λ et θ les coordonnées $(u ; x)$ de M /emphpar rapport au repère normé $u'Ou, y'Oy$.
En déduire que l'ensemble des points M, quand θ varie, θ restant fixe est une conique. Calculer l'excentricité de cette conique en fonction de θ , ainsi que sa distance focale et la longueur de son axe focal.
Montrer q.ne cette conique passe par les points d'intersection de (C).avec les axes $x'Ox$ et $v'Ov$.