∽ Baccalauréat Pondichéry juin 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

I.

Déterminer tous les nombres écrits dans le système décimal au moyen de quatre chiffres $\overline{abcd}$ $(a \neq 0)$, multiples de 5 et tels que les trois nombres c, $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ soient, dans cet ordre, en progression géométrique.

II.

Dans un plan orienté, on donne deux repères orthonormés fixes, déterminés par les axes $u'\text{O}u$ et $v'\text{O}v$, pour l'un, $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ pour l'autre, tels que

$$\begin{array}{rcl}\left(\overrightarrow{\text{O}u},\ \overrightarrow{\text{O}v}\right) & = & \left(\overrightarrow{\text{O}z},\ \overrightarrow{\text{O}y}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\\ \left(\overrightarrow{\text{O}u},\ \overrightarrow{\text{O}x}\right) & = & \theta + 2k\pi,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\ (\theta\ \text{constant}).\end{array}$$

On désigne par (C) le cercle de centre 0, de rayon 1.
Un point H, d'abscisse $\overline{\text{OH}} = \lambda$, est variable sur $u'\text{O}i$.
La perpendiculaire en H à $u'\text{O}u$ coupe $x'\text{O}x$ en P.
Soit P$'$ le pied de la polaire de P par rapport à (C).

1. Calculer la mesure algébrique, $z = \overline{\text{P}'\text{P}}$, du vecteur $\overrightarrow{\text{P}'\text{P}}$ sur l'axe $x'\text{O}x$, puis sa longueur, $r = \text{P}'\text{P}$, en fonction de λ et θ.
   Étudier les variations de z quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.
   En déduire les variation de r.
   Construire les courbes (Γ) et (Γ') représentant les variations de z et de r.
   Montrer que la courbe représentative des variations de r possède un axe de symétrie.
   Combien y a-t-il de points H tels que $\overrightarrow{\text{P}'\text{P}}$ ait une longueur donnée ?
2. Soit I le milieu de P$'$P et ω sa projection orthogonale sur Ou.
   a. Établir la relation
   $$\text{IO}^2 - \text{IH}^2 = \overline{\text{OH}}\left(2\overline{\text{O}\omega} - \text{OH}\right).$$
   En déduire que $\text{IO}^2 - \text{IH}^2$ s'exprime simplement en fonction de θ.
   b. Soit A le point d'intersection, d'abscisse positive, de $x'\text{O}x$ et du cercle (C). On projette orthogonalement A en A$'$ sur PH.
   Les perpendiculaires en P et P$'$ à $x'\text{O}x$ coupent $u'\text{O}u$. en p et p' respectivement.
   Montrer que le cercle (C), le cercle (H) de centre H de rayon HA$'$ et les cercles (p) et (p'), de centres p et p', tangents à $z'\text{O}z$, font partie d'un même faisceau.
   Discuter la nature de ce faisceau suivant les valeurs de λ.
3. La polaire de P par rapport à (C) et la parallèle à $u'\text{O}u$ passant par P se coupent en M.
   Déterminer en fonction de λ et θ les coordonnées $(u\ ;\ x)$ de M /emphpar rapport au repère normé $u'\text{O}u,\ y'\text{O}y$.
   En déduire que l'ensemble des points M, quand θ varie, θ restant fixe est une conique.

Calculer l'excentricité de cette conique en fonction de θ, ainsi que sa distance focale et la longueur de son axe focal.

Montrer q.ne cette conique passe par les points d'intersection de (C).avec les axes $x'\mathrm{O}x$ et $v'\mathrm{O}v$.