Pondichéry juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de la fonction qui, à la variable réelle x, associe le nombre réel

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

   Construire la courbe représentative, (Γ), dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, l'unité de longueur étant égale à 1 cm.
2. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (Γ), l'axe $x'\text{O}x$ et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 5$.

EXERCICE 2

Déterminer deux entiers naturels ayant pour somme 240 et pour P.P.C.M. 504.

EXERCICE 3

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, on considère les points F(a ; 0), $\text{F}'(-a\ ;\ 0)$, $\text{B}(4a\ ;\ 0)$ et le cercle (C) de centre O et de rayon $2a$, a étant un nombre réel positif.

1. Le point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ étant un point donné du plan, on considère le cercle (Γ) de diamètre $\text{F}M_0$.
   Écrire les équations des cercles (C) et (Γ) et montrer que l'équation de l'axe radical, (Δ), de ces deux cercles est

$$\left(x_0 + a\right)x + y_0 y - a\left(x_0 + 4a\right) = 0.$$

   Montrer que la droite (Δ) est sécante au cercle (C) à la condition nécessaire et suffisante que le point M_0 soit extérieur à un ellipse, (E), que l'on déterminera par son équation.
   Si M_0 est en B, que peut-on dire du cercle (C) et du cercle (Γ) correspondant ?
2. *On suppose, dans toute la suite du problème, que le point M_0 est variable sur la droite (D) passant par B et de coefficient directeur égal à* 1.
   Démontrer que, lorsque M_0 décrit la droite (D), la droite (Δ) passe par un point fixe, I, dont on déterminera les coordonnées. On donnera une solution analytique et une solution géométrique.
3. Soit M_1 la projection orthogonale de F sur (Δ).
   Quel est, quand M_0 varie sur (D), l'ensemble des points M_1 ? Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{F}'M_0}$ et $\overrightarrow{\text{F}M_1}$ sont parallèles et que le produit $\overrightarrow{\text{F}'M_0} \cdot \overrightarrow{\text{F}M_1}$ est constant.
   En déduire que la transformation ponctuelle qui, à tout point M_0, associe le point M_1 est le produit d'une inversion de pôle F$'$ et d'une translation.