∽ Baccalauréat C Portugal–Tunisie juin 1974 ∾

EXERCICE 1

Soit S l'ensemble des suites arithmétiques réelles, c'est-à-dire de toutes les applications de la forme :

$$\left\{\begin{array}{llll} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}\\ & n & \longmapsto & u_n = a+nb\end{array}\right.$$

(a, b constantes réelles).

Étant donné deux entiers distincts p, q supérieurs à 1, on considère dans S les deux relations binaires, notées respectivement $\left(\gamma_p\right)$ et $\left(\gamma_q\right)$ ainsi définies :

$$\begin{array}{lcl} u\left(\gamma_p\right) v & \iff & \left[(\forall \lambda \in \mathbb{N})(n = \lambda p) \Longrightarrow (u_n \leqslant v_n)\right]\\ u\left(\gamma_q\right) v & \iff & \left[(\forall \lambda \in \mathbb{N})(n = \lambda q) \Longrightarrow (u_n \leqslant v_n)\right]\end{array}$$

Démontrer que ces deux relations sont équivalentes.

EXERCICE 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (2x-1)^2.$$

On lui associe deux fonctions α et β en posant pour tout x réel :

$$\alpha(x) = \sup_{x \leqslant t \leqslant x+1} f(t)$$

(ce qui signifie que $\alpha(x)$ est le maximum de la restriction de f au segment $[x~;~x+1]$).

$$\beta(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer explicitement $\alpha(x)$ et $\beta(x)$.

Constater, et si possible justifier, que, pour tout x réel, $\alpha(x) > \beta(x)$. Tracer sur une même figure (axes orthonormés) les représentations de leurs graphes.

PROBLÈME

Les parties A, B, C peuvent être abordées indépendamment

Partie A

Soit le plan vectoriel réel $\mathbb{R}^2$; (1, 0) et (0, 1) forment la base canonique. Étant donné un endomorphisme f de ce plan - c'est-à-dire une application linéaire de ce plan dans lui-même -, on dira qu'une base $(u,~v)$ de $\mathbb{R}^2$ est adaptée à f si les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{ll} v - f(u) & \text{est colinéaire à } u\\ u + f(v) & \text{est colinéaire à } v.\end{array}\right.$$

1. Montrer que si $(u,~v)$ est adaptée à f, $(v,~u)$ est adaptée à $-f$.
2. Soit s la symétrie : $(x~;y) \longmapsto (-x~;~y)$.
   Vérifier que $\left(1+\sqrt{2}~;~1\right)$ et $\left(1~;~1+\sqrt{2}\right)$ forment une base adaptée à s.
   Combien existe-t-il de bases adaptées à s et dont le premier vecteur $\left(x_1~;~y_1\right)$. est donné? On achèvera de les déterminer en calculant en fonction de xl et YI le second vecteur.

3. À un endomorphisme g on associe sa matrice dans la base canonique. Quand cette base est adaptée à g, décrire la forme de la matrice. 2

Partie B

Si a, b sont deux réels, on note $g_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ de matrice $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit D l'ensemble des éléments $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\sup\left(|x|,\ |y|\right) \leqslant 1.$$

Soit Δ l'ensemble de ceux qui vérifient :

$$|x| + |y| \leqslant 1.$$

Soit $\Delta(a,\ b)$ l'image de Δ par $g_{a,\ b}$.

1. Démontrer : $\delta(1\ ;\ 1) = D$.

2. Démontrer : $[\Delta(a\ ;\ b) \subset D] \iff [(a\ ;\ b) \in D]$

(L'interprétation, d'ailleurs conseillée, de ces résultats sur une figure ne saurait tenir lieu de démonstration).

Partie C

On donne le nombre complexe $c = \dfrac{\text{i} - 1}{\sqrt{2}}$.

À chaque élément $z = x + \text{i}y$ de $\mathbb{C}$ on associe son image $(x\ ;\ y)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la structure euclidienne habituelle.

1. Définir géométriquement la transformation $h\ :\ z \longmapsto cz$, considérée comme un endomorphisme du plan euclidien, et sa réciproque h^{-1}.

Démontrer que l'on a, pour tout vecteur w du plan :

$$(2) \qquad h(w) + h^{-1}(w) = -\sqrt{2}.w$$

2. Rechercher deux réels α et β tels que :

$$(\alpha + c)(\beta - c) = 1$$

3. Soit u un vecteur non nul du plan. Montrer que $(u,\ h(u))$ et $\left(u,\ -h^{-1}(u)\right)$ sont des bases adaptées à h (voir partie A).

Démontrer, à l'aide de (2) ou de C - 2., qu'il n'existe pas d'autre base, adaptée à h, de premier vecteur u.