Journée de la Régionale APMEP

14/10/26

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES CYCLE 4 ET SECONDE

Frédéric de Ligt & Jean-Paul Guichard

Dans les nouveaux programmes de Cycle 4 et de seconde

- Mises en perspective historiques et culturelles

(voir document)

- Le choix que nous vous proposons :

la racine carrée à travers des textes et auteurs variés (1800 av. J.C, 1637 ap. J.C), présentation et étude de textes.

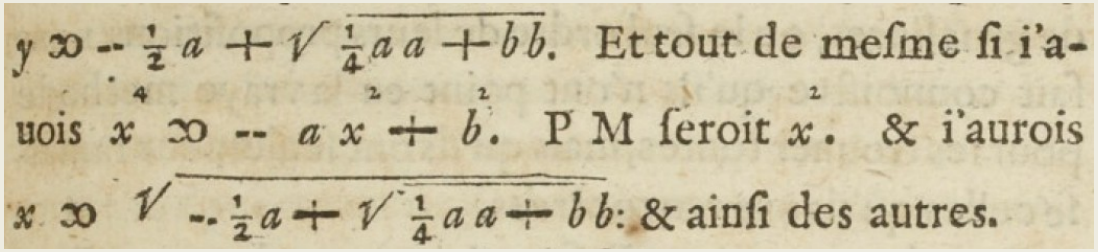


Les racines carrées

Une longue histoire

- qui traverse toutes les civilisations et toutes les époques,
- qui s'enracine dans la géométrie et dans l'algèbre.




$y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

Babylone

Calcul de la diagonale d'un carré

Tablette YBC 7289 (entre -1900 et -1600)

Les indications numériques

- 30 ;
- 42 + 25/60 + 35/3600 ≈ 42,4263889 ;
- 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000
  ≈ 1,414212963.

√2 approchée au millionième !

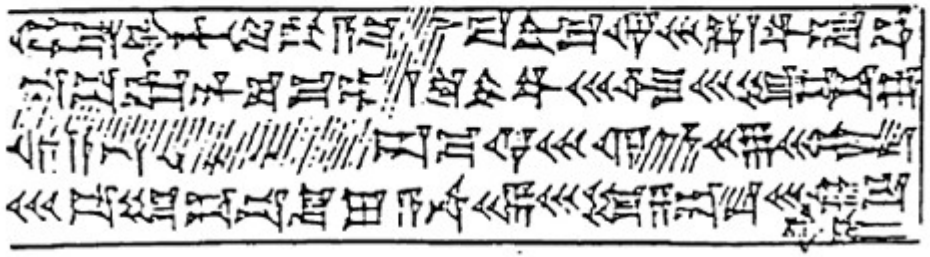


Babylone

Calcul de la racine carrée dans un problème du second degré

Tablette BM 13901 (XVIIIe siècle av. J.-C.)

J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : 14`30. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras 30' et 30' : 15'. Tu ajouteras à 14`30 : 14`30°15'. C'est le carré de 29°30'. Tu ajouteras le 30' que tu as croisé à 29°30' : 30 le côté du carré.



Avec notre symbolisme

$(x - ½)^2 = 870{,}25$ $\sqrt{870{,}25} = 29{,}5$ $x = 29{,}5 + 0{,}5 = 30$

Document 6

La Grèce antique

La crise des irrationnels

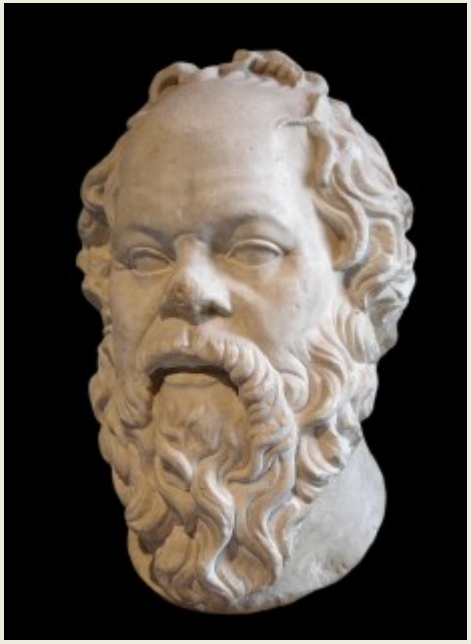
La duplication du carré

- dans le *Ménon* de Platon (-427 ;-348)

dialogue entre Socrate, Ménon et un esclave

"Ne pourrait-on avoir un autre espace double de celui-ci, mais semblable, et ayant aussi toutes ses lignes égales ?" /…/

"Combien aurait-il de pieds ?"



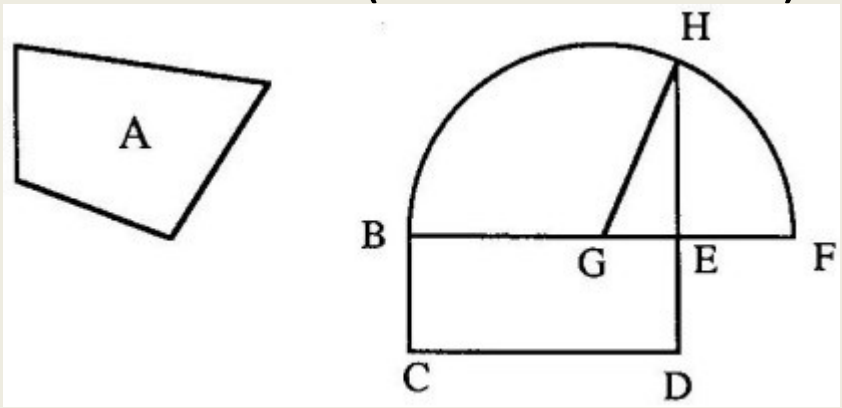
Socrate (-470 ; -399)

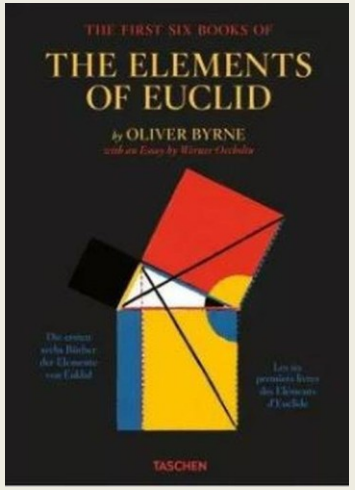
Document 1

La Grèce antique

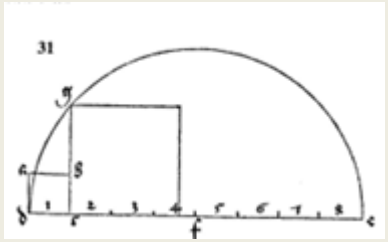
La construction de la racine carrée

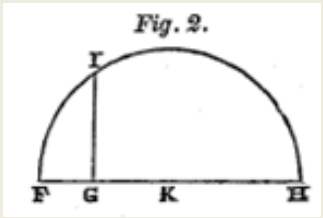
- **Euclide *Eléments*** II 14 (vers 300 av. J.C.) : $EH = \sqrt{A}$

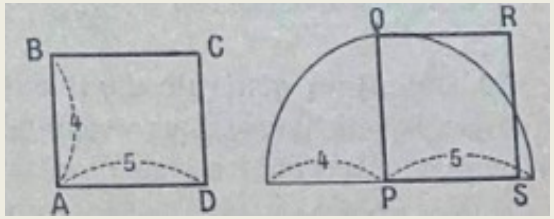




- Postérité de la construction







Dürer (1525) Descartes (1637) Manuel Algèbre 3e (1941)

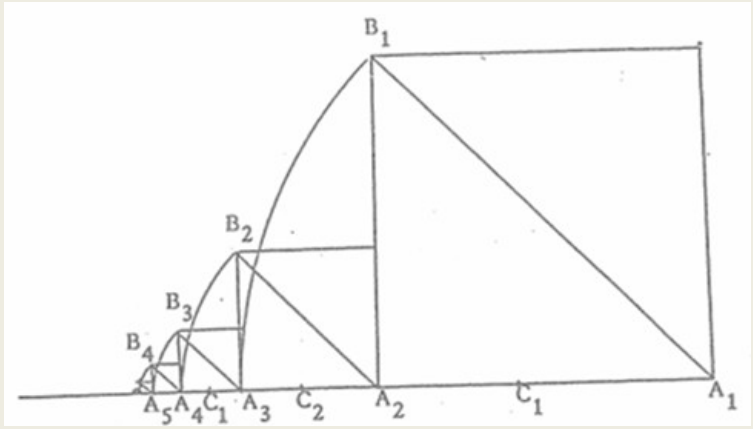
Document 5

La Grèce antique

Démonstrations d'irrationalité

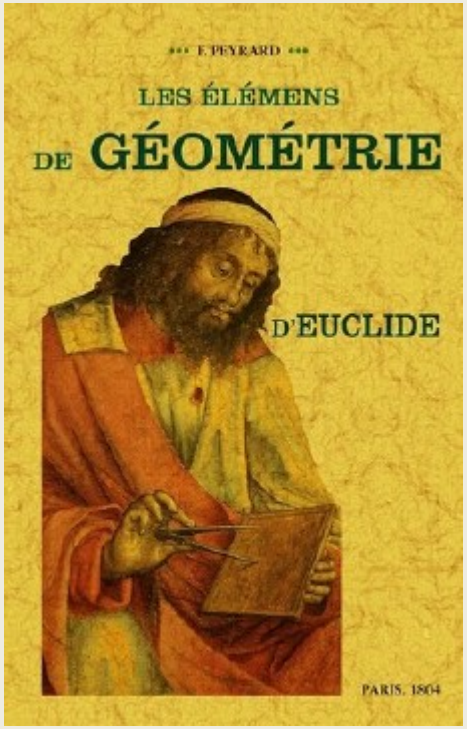
Euclide *Eléments* livre X (vers 300 av. J.C.)

- Le pair et l'impair
- L'algorithme d'Euclide



Mais aussi

- Par le rapport de nombres carrés



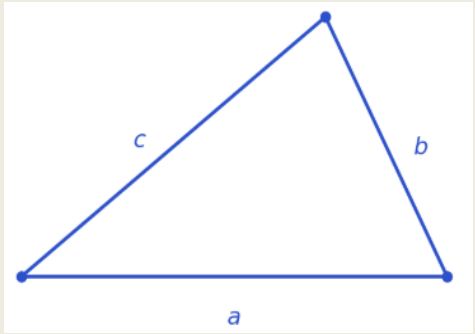
Document 2

La Grèce antique

L'algorithme de Héron d'Alexandrie

Dans les ***Métriques*** Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C.) calcule des aires de figures de longueurs données.

Pour le triangle il établit une formule qui porte son nom :



$$\mathcal{A} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

(p = demi-périmètre)

Côtés : 7, 8, 9 unités $\quad Aire = \sqrt{720}$

$\sqrt{720} \approx 26\ ½\ 1/3$ *et* $(26\ ½\ 1/3)^2 = 720\ 1/36$

Côtés : 13, 14, 15 unités $\quad Aire = \sqrt{7056} = 84$



- « Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante : ... »

Document 4

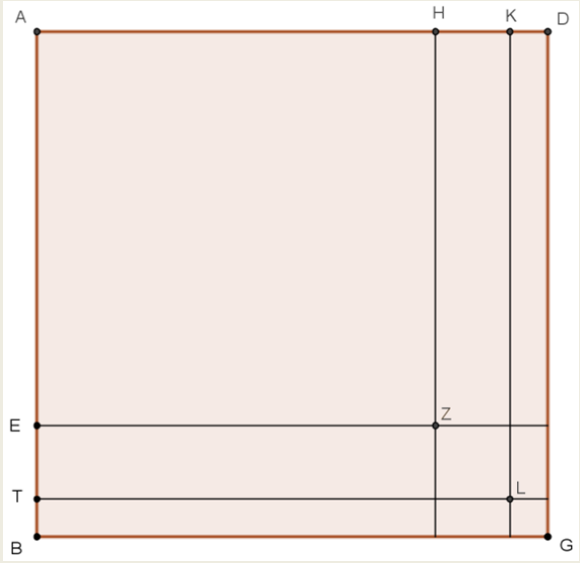
La Grèce antique

L'algorithme de Théon d'Alexandrie

Dans sa *Composition mathématique* **Ptolémée** donne une valeur approchée de $\sqrt{4500}$ (67 4' 55''). **Théon d'Alexandrie** (335-405) donne, dans son *Commentaire à cet ouvrage,* un algorithme pour expliquer ce résultat et calculer la racine carrée d'un nombre.

- Il utilise pour cela :

la géométrie et une identité remarquable.



« On cherchera comment, étant donnée l'aire d'un carré dont le côté n'est pas d'une longueur déterminée, nous calculerons ce côté approximativement. /…/ Mais, pour rendre cette démonstration de la distinction des parties d'un tout, plus sensible, par son application à quelque nombre contenu dans la composition (de Ptolémée), nous l'avons appliquée au nombre 4500 dont il a fait le côté de 67 4' 55''.

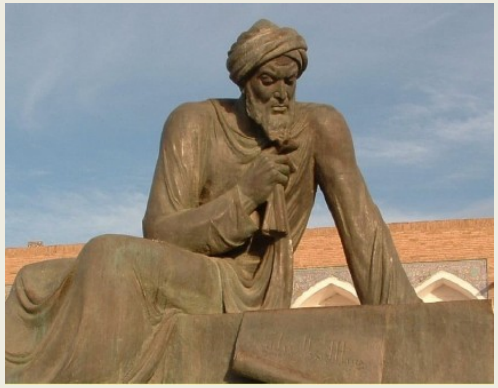
Document 4

Les Arabes

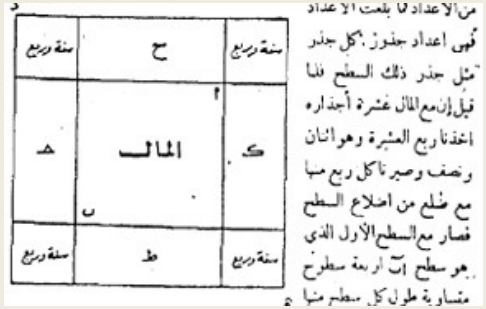
Résolution des équations du second degré par Al Khawarizmi (780-850)

Pour le type $x^2 + ax = b$,

- Exemple exposé : $x^2 + 10x = 39$
- La solution : $(x + 5)^2 = 64$, $\sqrt{64} = 8$ et $x = 8 - 5 = 3$



« Quant aux biens (carrés) et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams.
Sa signification est que tout bien, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines, cela atteindra trente-neuf.
Son procédé (de résolution) consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplie par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est 8 et tu en retranches la moitié des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du bien que tu cherches et le bien est neuf. »



Document 6

La Renaissance en Occident

Calculs de longueurs et d'aires chez Chuquet (1484)

Dans *La Géométrie* de Nicolas Chuquet (1450-1488)

Trois exemples

Diamètre cercle inscrit (*triangle équilatéral de côté 12)*

$ED = \frac{2}{3}\sqrt{108} = \sqrt{48}$

Diagonale *losange* FGKP (FG = 6, GP =6)

$FK = \sqrt{27} + \sqrt{27} = \sqrt{108}$

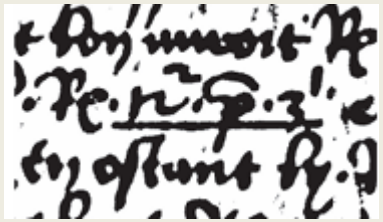
Aire *octogone* régulier inscrit (*cercle de diamètre 20*)

$200 + 2(10 - \sqrt{50}) \times \sqrt{200} = \ldots = \sqrt{80\,000}$

ou : $8 \times$aire AEO $= 8 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{50} \times 10) = \ldots$

ou…





$\sqrt{12x^2 + 3x}$

Document 3 et 7

La Renaissance en Occident

Le produit des racines par Stevin (1585)

Démonstration par Stevin(1548-1620)

dans son *Arithmétique*

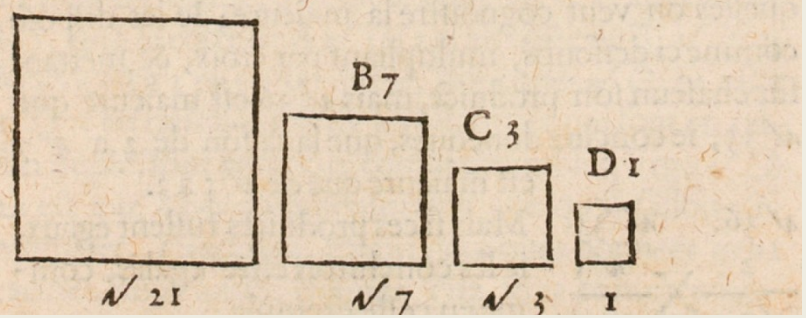
De la multiplication de racines ſimples.

PROBLEME XXII.

Eſtant donnée racine ſimple à multiplier, & racine ſimple multiplicateur : Trouuer leur produict.

/.../

Preparation de la demonſtration. Soient deſcripts quatre quarrez, à ſçauoir A 21, & B 7, & C 3, & D 1, & leurs coſtez ſeront √ 21, & √ 7, & √ 3, & 1. *Demonſtration.*





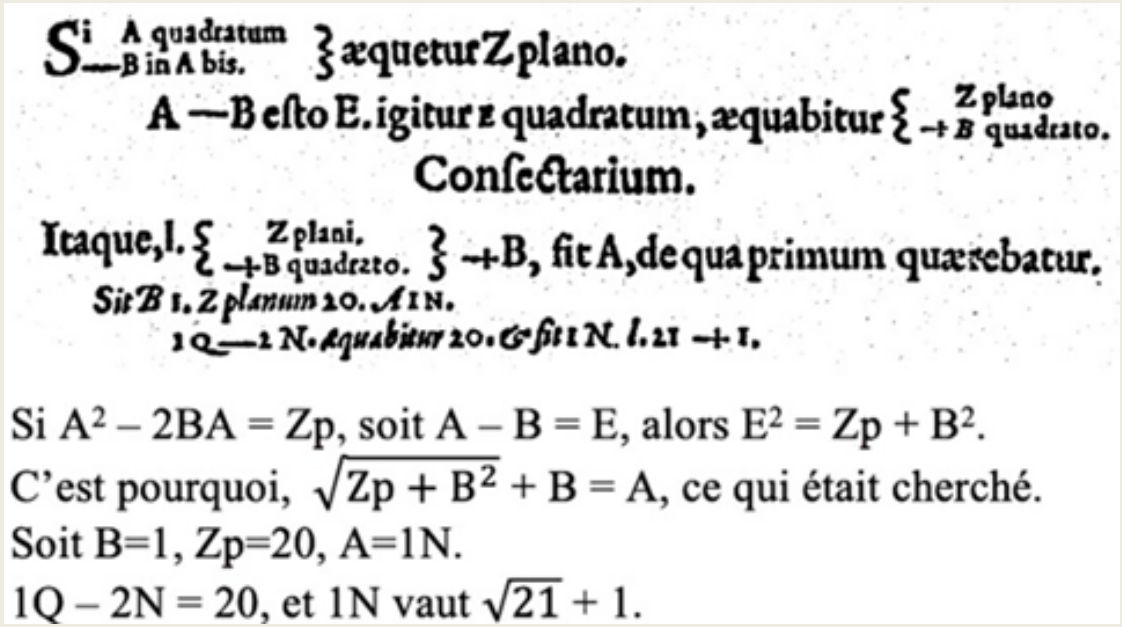
Document 3

La Renaissance en Occident

Résolution des équations du second degré avec des lettres par Viète (1540-1603)

Résolution de l'équation $x^2 - 2ax = b$ (Aq – 2BA = Zp)

et application numérique à : $1x^2 - 2x = 20$



Si A quadratum, —B in A bis. æquetur Z plano.

A —B esto E. igitur E quadratum, æquabitur Z plano, + B quadrato.

Consectarium.

Itaque, l. Z plani, + B quadrato. + B, fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N.

1 Q — 2 N. æquabitur 20. & fit 1 N. l. 21 + 1.

Si $A^2 - 2BA = Zp$, soit $A - B = E$, alors $E^2 = Zp + B^2$.

C'est pourquoi, $\sqrt{Zp + B^2} + B = A$, ce qui était cherché.

Soit B=1, Zp=20, A=1N.

1Q – 2N = 20, et 1N vaut $\sqrt{21} + 1$.



Document 6

La Renaissance en Occident

Histoire des notations de la racine carrée

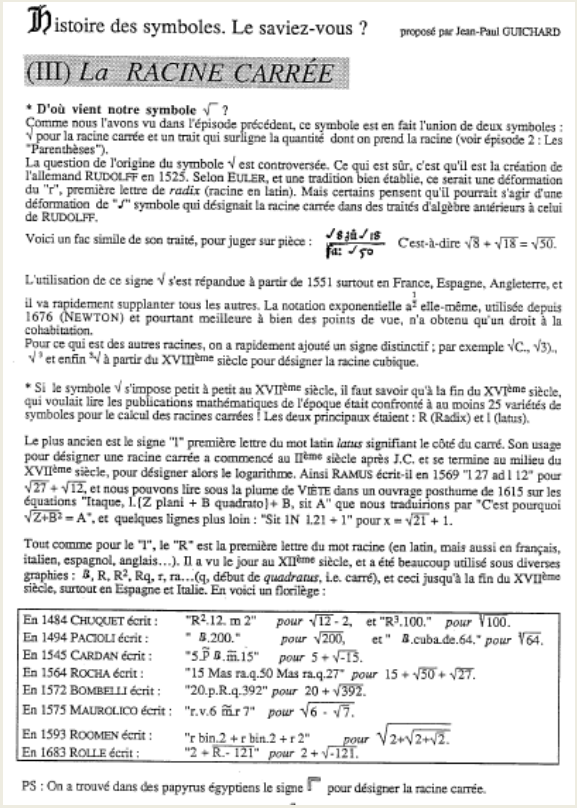
A retrouver dans :

un article paru dans le Corol'aire n°23

Rudolff (1525) : 

C'est-à-dire $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$.

En 1484 CHUQUET écrit :	"R².12. m 2"	*pour* $\sqrt{12} - 2$, et "R³.100." *pour* $\sqrt[3]{100}$.
En 1494 PACIOLI écrit :	" ℬ.200."	*pour* $\sqrt{200}$, et " ℬ.cuba.de.64." *pour* $\sqrt[3]{64}$.
En 1545 CARDAN écrit :	"5.P̃ ℬ.m̃.15"	*pour* $5 + \sqrt{-15}$.
En 1564 ROCHA écrit :	"15 Mas ra.q.50 Mas ra.q.27"	*pour* $15 + \sqrt{50} + \sqrt{27}$.
En 1572 BOMBELLI écrit :	"20.p.R.q.392"	*pour* $20 + \sqrt{392}$.
En 1575 MAUROLICO écrit :	"r.v.6 m̃.r 7"	*pour* $\sqrt{6} - \sqrt{7}$.
En 1593 ROOMEN écrit :	"r bin.2 + r bin.2 + r 2"	*pour* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
En 1683 ROLLE écrit :	"2 + R̄.- 121"	*pour* $2 + \sqrt{-121}$.



Histoire des symboles. Le saviez-vous ? proposé par Jean-Paul GUICHARD

(III) *La RACINE CARRÉE*

*** D'où vient notre symbole √ ?**

Comme nous l'avons vu dans l'épisode précédent, ce symbole est en fait l'union de deux symboles : √ pour la racine carrée et un trait qui surligne la quantité dont on prend la racine (voir épisode 2 : Les "Parenthèses").

La question de l'origine du symbole √ est controversée. Ce qui est sûr, c'est qu'il est la création de l'allemand RUDOLFF en 1525. Selon EULER, et une tradition bien établie, ce serait une déformation du "r", première lettre de *radix* (racine en latin). Mais certains pensent qu'il pourrait s'agir d'une déformation de "✓" symbole qui désignait la racine carrée dans des traités d'algèbre antérieurs à celui de RUDOLFF.

Voici un fac simile de son traité, pour juger sur pièce : C'est-à-dire $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$.

L'utilisation de ce signe √ s'est répandue à partir de 1551 surtout en France, Espagne, Angleterre, et il va rapidement supplanter tous les autres. La notation exponentielle $a^{\frac{1}{2}}$ elle-même, utilisée depuis 1676 (NEWTON) et pourtant meilleure à bien des points de vue, n'a obtenu qu'un droit à la cohabitation.

Pour ce qui est des autres racines, on a rapidement ajouté un signe distinctif ; par exemple √C., √3)., $\sqrt{\ }^3$ et enfin $\sqrt[3]{}$ à partir du XVIIIème siècle pour désigner la racine cubique.

* Si le symbole √ s'impose petit à petit au XVIIème siècle, il faut savoir qu'à la fin du XVIème siècle, qui voulait lire les publications mathématiques de l'époque était confronté à au moins 25 variétés de symboles pour le calcul des racines carrées ! Les deux principaux étaient : R (Radix) et l (latus).

Le plus ancien est le signe "l" première lettre du mot latin *latus* signifiant le côté du carré. Son usage pour désigner une racine carrée a commencé au IIème siècle après J.C. et se termine au milieu du XVIIème siècle, pour désigner alors le logarithme. Ainsi RAMUS écrit-il en 1569 "l 27 ad l 12" pour $\sqrt{27} + \sqrt{12}$, et nous pouvons lire sous la plume de VIÈTE dans un ouvrage posthume de 1615 sur les équations "Itaque, l.[Z plani + B quadrato]+ B, sit A" que nous traduirions par "C'est pourquoi $\sqrt{Z+B^2} = A$", et quelques lignes plus loin : "Sit 1N 1.21 + 1" pour $x = \sqrt{21} + 1$.

Tout comme pour le "l", le "R" est la première lettre du mot racine (en latin, mais aussi en français, italien, espagnol, anglais…). Il a vu le jour au XIIème siècle, et a été beaucoup utilisé sous diverses graphies : ℬ, R, R², Rq, r, ra…(q, début de *quadratus*, i.e. carré), et ceci jusqu'à la fin du XVIIème siècle, surtout en Espagne et Italie. En voici un florilège :

En 1484 CHUQUET écrit :	"R².12. m 2"	*pour* $\sqrt{12} - 2$, et "R³.100." *pour* $\sqrt[3]{100}$.
En 1494 PACIOLI écrit :	" ℬ.200."	*pour* $\sqrt{200}$, et " ℬ.cuba.de.64." *pour* $\sqrt[3]{64}$.
En 1545 CARDAN écrit :	"5.P̃ ℬ.m̃.15"	*pour* $5 + \sqrt{-15}$.
En 1564 ROCHA écrit :	"15 Mas ra.q.50 Mas ra.q.27"	*pour* $15 + \sqrt{50} + \sqrt{27}$.
En 1572 BOMBELLI écrit :	"20.p.R.q.392"	*pour* $20 + \sqrt{392}$.
En 1575 MAUROLICO écrit :	"r.v.6 m̃.r 7"	*pour* $\sqrt{6} - \sqrt{7}$.
En 1593 ROOMEN écrit :	"r bin.2 + r bin.2 + r 2"	*pour* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
En 1683 ROLLE écrit :	"2 + R̄.- 121"	*pour* $2 + \sqrt{-121}$.

PS : On a trouvé dans des papyrus égyptiens le signe ⌐ pour désigner la racine carrée.

7 documents au choix

1 La duplication du carré dans le *Ménon* de Platon

2 Démonstrations d'irrationalité

3 Calculs et formules chez Chuquet et Stevin

4 Algorithmes de Héron et Théon

5 Construction géométrique de la racine carrée

6 Racines et problèmes du second degré

7 Calculs géométriques chez Chuquet (fiche élève)

Conclusion

Depuis la plus haute antiquité, de nombreux problèmes géométriques, arithmétiques ou algébriques se ramènent au problème de trouver un nombre x tel que $x^2 = a$, dont la formulation géométrique permet de se convaincre de l'existence, d'élaborer des algorithmes de calcul ou des méthodes de résolution d'équations du second degré.

Quelques questions pour finir :

- Par quel procédé les babyloniens ont-ils obtenu une telle précision pour √2 ?
- Les règles de calcul sur les racines carrées sont-elles vraiment nécessaires ?
- Sont-elles rigoureusement établies, selon les standards actuels ?
- Quels sont les algorithmes implémentés dans les calculatrices pour le calcul des racines carrées ?
- ...

Quelques ressources fiables

- Le portail des IREM
- Le site de la CII Epistémologie

et Histoire des mathématiques

- Le site Publimath
- Le site histoire de l'APMEP