Principes fondamentaux des dénombrements élémentaires

par Pierre JULLIEN

Dénombrer un ensemble fini, c'est trouver le nombre d'éléments qu'il possède.

Une méthode consiste à l'**énumérer**, c'est-à-dire à dresser une liste exhaustive de ses éléments, puis à compter les éléments de la liste constituée. Ce n'est là que déplacer la difficulté car il faut alors une méthode pour élaborer la liste en question.

La méthode qui suit consiste à connaître quelques principes simples et généraux s'appliquant à des ensembles dotés de structures simples et à reconnaître qu'un cas complexe n'est qu'une superposition de cas simples et connus.

On n'oubliera jamais que

DÉNOMBRER c'est STRUCTURER

Dans ce qui suit les ensembles considérés sont finis et le nombre d'éléments d'un ensemble X est noté $|X|$ (Attention : cette notation n'est pas universelle).

PRINCIPE D'ÉGALITÉ

$$\boxed{\textit{S'il existe une bijection de } A \textit{ sur } B \textit{ alors } |A| = |B|}$$

Aussi banal qu'il paraisse ce principe est très profond, puisqu'il est à la base même du concept de nombre cardinal.

Remarque. Pour montrer que f est une bijection de A sur B il suffit de montrer l'existence d'une application g de B sur A telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient les applications identités de A et B respectivement. Une telle application g est l'application réciproque de f ; elle se note aussi f^{-1}.

Ce principe est utilisé pour remplacer un problème de dénombrement par un autre, que l'on estime plus simple !

Par exemple, soient :

A l'ensemble des monômes de coefficient 1, de degré n, à p variables ;

B l'ensemble des chemins dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de (0,0) à (p-1,n) tels que le suivant de (x,y) soit (x+1,y) ou (x,y+1) ;

C l'ensemble des mots sur l'alphabet {h,v} comprenant p-1 occurrences de h et n occurrences de v ;

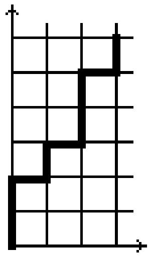
D l'ensemble des parties de {1, 2, 3, ... , n+p-1} possédant n éléments ;

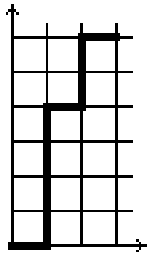
alors on a

$$|A| = |B| = |C| = |D| = C_{n+p-1}^{n}$$

En effet, le lecteur pourra, à titre d'exercice, vérifier que les applications schématisées ci-dessous sont bien des bijections. Ce qui justifie les égalités $|A| = |B| = |C| = |D|$. Par ailleurs, le résultat $|D| = C_{n+p-1}^{n}$ devant être connu.

Soit n=6 et p=4

$x^2yz^2t \longmapsto$  $\longmapsto$ vvhvhvvhv $\longmapsto$ $\{1,2,4,6,7,9\}$

$y^4z^2 \longmapsto$  $\longmapsto$ hvvvvhvvh $\longmapsto$ $\{2,3,4,5,7,8\}$

A un monôme en x y z t, de degré 6, associons le chemin du point (0,0) au point (3,9) de telle sorte que verticalement nous progressions d'un nombre égal à l'exposant de x puis après un pas à droite d'un nombre égal à l'exposant de y, etc ; à ce chemin associons le mot comprenant 3 lettres h et 6 lettres v dans l'ordre (horizontal ou vertical) de la progression et enfin associons une partie à 6 éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} caractérisant les emplacements de la lettre v.

PRINCIPE D'ADDITION

Si un ensemble est la réunion de parts disjointes deux à deux,
alors son nombre d'éléments est la somme des nombres d'éléments de chaque part

Plus formellement.

Si $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ (*où* $i \neq j$ *entraîne* $A_i \cap A_j = \varnothing$) *alors* $|E| = \sum_{i \in I} |A_i|$.

Remarque. Certains A_i peuvent être vides.

Ce principe est à la base de la notion d'addition dans les entiers, son mode d'utilisation consiste à distinguer dans l'ensemble à dénombrer des classes d'objets deux à deux disjointes (ces classes étant plus faciles à dénombrer, a priori). Le cas le plus élémentaire est de distinguer deux classes complémentaires l'une de l'autre.

Le moyen le plus fréquent pour partager un ensemble est d'utiliser le retour inverse selon une application f de E dans un ensemble I. En effet, $E = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\})$, et les $f^{-1}(\{i\})$ sont disjoints.

Exemple $\quad C_{n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{n-1}^p + C_n^p$

Choisir pour E l'ensemble des parties à (p+1) éléments de { 0, 1, 2, ..., n } et pour f l'application de E dans { 0, 1, 2, ..., n } qui à chaque élément de E fait correspondre son plus grand élément.

PRINCIPE D'ADDITION-SOUSTRACTION

Etant donné deux ensembles A et B non nécessairement disjoints, on a

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

De même

$$\boxed{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|}$$

Plus généralement la formule est compliquée.

$$\boxed{\textit{Soit } E = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \textit{alors } |E| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \text{etc.}}$$

qui se lit somme des nombres d'éléments de chaque A_i ,
moins somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris deux à deux,
plus somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris trois à trois,
moins somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris quatre à quatre,
et ainsi de suite jusqu'à
plus ou moins nombre d'éléments de l'intersection de tous les A_i (où le signe est moins quand les A_i sont en nombre pair et plus dans le cas contraire).

D'utilisation très délicate, ce principe est surtout intéressant lorsque les nombres d'éléments des intersections des A_i pris p à p ne dépendent que de p et non pas du choix des A_i .

Dans ce cas la formule s'écrit aussi

$$|E| = \sum_{1 \le p \le n} (-1)^{p+1} C_n^p \left| A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_p \right|$$

Exemple $C_n^k = C_n^1 C_{n-1}^{k-1} - C_n^2 C_{n-2}^{k-2} + C_n^3 C_{n-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k+1} C_n^k C_{n-k}^0$

Choisir pour E l'ensemble des parties à k éléments de { 1, 2, ..., n } et pour A_i la partie de E constituée des éléments de E auxquels i appartient.

PRINCIPE DE MULTIPLICATION

> *S'il existe un procédé d'énumération (de construction, d'identification) des éléments d'un ensemble* E *en* k *étapes de telle sorte que l'étape* i $(1 \le i \le k)$ *comporte* n_i *choix, ce nombre* n_i *étant indépendant des choix précédents et que à l'issue de ces* k *étapes chaque élément de* E *soit obtenu une seule fois alors* E *possède* $n_1 * n_2 * \quad * n_k$ *éléments.*

Ce principe est à la base de la notion de multiplication dans les naturels. Son utilisation est très fréquente mais parfois délicate.

Exemple Il y a n (n-1) ... (n- p+1) mots de longueur p dont toutes les lettres sont distinctes, sur un alphabet à n éléments.

Définir l'étape i comme le choix de la iéme lettre du mot parmi les (n-i+1) symboles de l'alphabet non encore utilisés.

PRINCIPE DE DIVISION

> *Soit une partition d'un ensemble* E *(non vide) telle que toutes les classes possèdent le même nombre d'éléments* N.
> *Notons* C *le nombre des classes. On a* $|E| = C*N$ *soit encore* $C = |E| / N$ *ou* $N = |E| / C$.

Ce principe est en quelque sorte un cas particulier du principe précédent. Il est fréquemment utilisé pour déterminer C ou N. Il est connu sous le nom de principe des bergers, qui pour compter leurs moutons comptent le nombre de pattes et divisent par quatre.

Exemple $$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$$

Prendre pour E l'ensemble des mots de longueur p, dont toutes les lettres sont distinctes sur un alphabet A à n éléments et la partition associée à l'application ß de source E telle que l'image d'un mot soit l'ensemble L des lettres qui y figurent, et dont le but est l'ensemble K des parties de A, qui possèdent p éléments. L'ensemble K possède C_n^p éléments et ß est une surjection telle que $\left|\beta^{-1}(\{L\})\right| = p!$ quel que soit L de K.

CE QU'IL FAUT CONNAÎTRE

Théoriquement il n'y a pas grand-chose à connaître mais en pratique mieux vaut en connaître un maximum. Par exemple, on ne saurait ignorer que :

> *Il y a* n^p *mots de longueur* p *sur un alphabet à* n *éléments*

Ce qui est une autre manière d'exprimer qu'il y a n^p applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour terminer, voici à titre d'illustration une preuve combinatoire de la formule du binôme.

Soit trois ensembles E, A et B disjoints. Notons $|E| = n$, $|A| = a$, $|B| = b$ et $F = A \cup B$. Nous allons dénombrer de deux manières différentes le nombre N des applications de E dans F. De manière directe [$N = (a+b)^n$] et de manière indirecte en décomposant l'ensemble W des applications de E dans F selon le nombre d'éléments de E qui ont leur image dans B.

Plus précisément, pour $0 \le p \le n$, notons A_p l'ensemble des applications de E dans F telles que p éléments de E aient leur image dans B (donc n-p ont leur image dans A).

Evidemment tous les A_p sont disjoints, donc $N = \sum_{0 \le p \le n} \left|A_p\right|$ (principe d'addition).

Calculons $|A_p|$. Pour obtenir un élément de A_p procédons en trois étapes satisfaisant au principe de multiplication :

- choix des p éléments de E dont l'image va dans B (C_n^p possibilités);
- choix de leurs images dans B (b^p possibilités)
- choix des images des n-p autres éléments dans A (a^{n-p} possibilités)

Ainsi $\left|A_p\right| = C_n^p \ a^{n-p} \ b^p$.

D'où la formule, dite du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{0 \le p \le n} C_n^p \ a^{n-p} \ b^p$

On retrouve : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

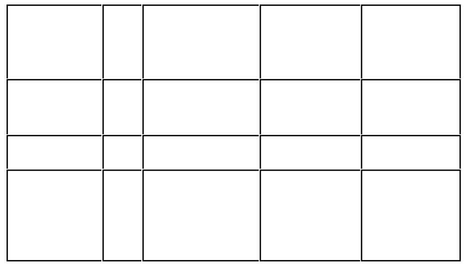
Annexe

DÉNOMBRER c'est STRUCTURER

Il s'agit de prendre possession des objets que l'on souhaite dénombrer.

Donnons quelques illustrations

Combien de rectangles dans cette figure ?

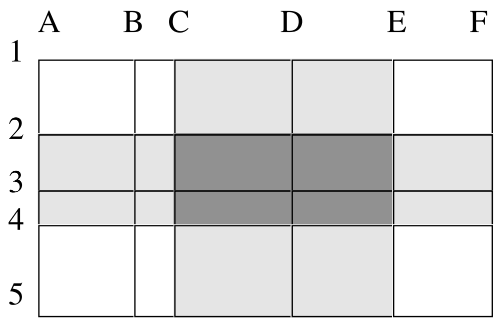


Qu'est-ce qu'un rectangle ? C'est ici l'intersection de deux bandes, l'une "verticale", l'autre "horizontale".

Pour en parler, il est commode de désigner les lignes. Ce que nous faisons.

Ainsi tout rectangle se désigne par une paire de lettres et une paire de chiffres. Ici CE-24.

Il y a bijection entre les désignations et les rectangles.



Il suffit de dénombrer les désignations. Ici 15 paires de lettres et 10 paires de chiffres.

Il y a 150 rectangles dans cette figure.

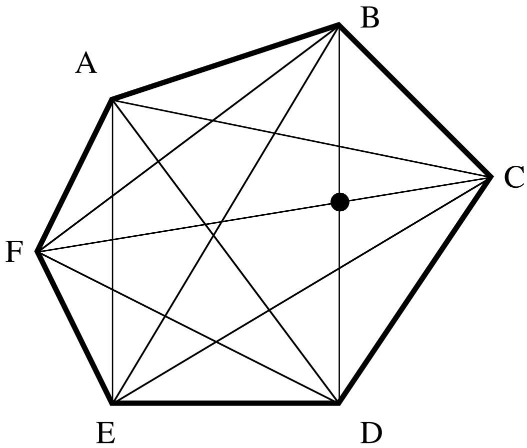
Plus généralement, **m(m+1)n(n+1) / 4** pour un rectangle de m cases par colonnes et n cases par lignes.

Combien d'intersections des diagonales dans ce polygone ?

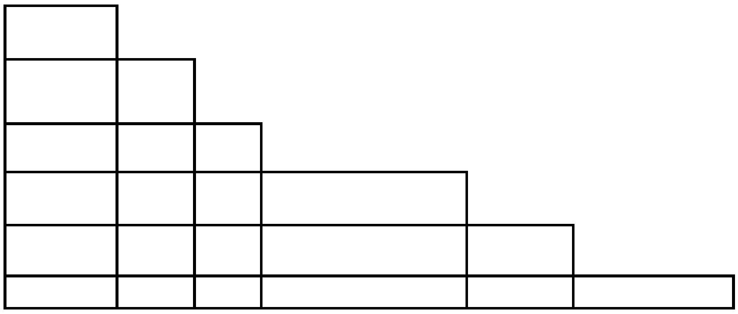
Qu'est-ce qu'un point d'intersection ? C'est le choix de deux diagonales. Ci-contre : BD et CF . C'est aussi le choix du quadrilatère BCDF.

A tout point d'intersection est associé un quadrilatère et réciproquement. Il y a autant de points d'intersection que de quadrilatères, dont les sommets sont parmi ceux du polygone donné. Ici 15.

Plus généralement **n(n-1)(n-2)(n-3) / 24** pour un polygone ayant n sommets.



Combien de rectangles dans cette figure ?



On note n le nombre de lignes (de colonnes). Ici n = 6 .

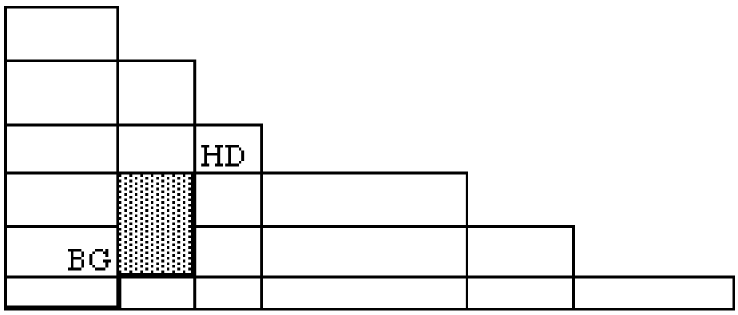
Alors le nombre R(n) cherché vaut SIGMA $_{i+j \leq n}$ i*j .

En effet, tout rectangle est caractérisé par son coin HD (en haut à droite) et son coin BG (en bas à gauche), le SIGMA porte sur les coordonnées (i,j) des points HD possibles et i*j est le nombre des BG possibles.

Tous calculs faits on trouve R(n) = n*(n+1)*(n+2)*(n+3) / 24

C'est le cœfficient **C** (n+3 , 4) .

Voici un codage direct qui permet de retrouver ce résultat comme une 4-partie de [1 , n+3] .



On code

1	**2**	3	**4**	**5**	6	**7**	8	9
	t		u	v		w		

(t-1 , u-t-1) sont les coordonnées de BG et (v-u , w-v) les composantes de BG, HD .

Ce résultat se généralise à k dimensions et vaut **C** (n+2*k-1 , 2*k)

Le triangle de Pascal

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
2	**1**	**2**	**1**	0	0	0	0	0	0	0
3	**1**	**3**	**3**	**1**	0	0	0	0	0	0
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	0	0	0	0	0
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	0	0	0	0
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	0	0	0
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**	0	0
8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**	0
9	**1**	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**96**	**9**	**1**

La première colonne ne contient que des 1 ; le reste de la première ligne ne contient que des 0 et, pour le reste, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent dans les cases immédiatement au-dessus à gauche et au dessus

8	1	8	**28**	**56**	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	**84**	126	126	84	96	9	1

C'est l'illustration de la formule $C_{n+1}^{p} = C_{n}^{p-1} + C_{n}^{p}$

De manière analogue, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent au-dessus dans la colonne de gauche et aussi en diagonale au-dessus et à gauche.

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	**1**	5	10	10	5	**1**	0	0	0	0
6	1	**6**	15	20	15	**6**	1	0	0	0
7	1	7	**21**	35	35	**21**	7	1	0	0
8	1	8	28	**56**	70	**56**	28	8	1	0
9	1	9	36	**84**	126	126	**84**	96	9	1

Ce qui illustre les formules $C_{n+1}^{p+1} = C_{p}^{p} + C_{p+1}^{p} + ... + C_{n-1}^{p} + C_{n}^{p}$, déjà présentée pour illustrer le principe d'addition, et $C_{p}^{0} + C_{p+1}^{1} + C_{p+2}^{2} + ... + C_{n}^{n-p} = C_{n+1}^{n-p}$.