



Ce document est destiné à vous présenter une brochure qui doit paraître au début de 2003. Elle a été mise au point, réalisée et expérimentée par une équipe de professeurs. Cette brochure a pour titre :

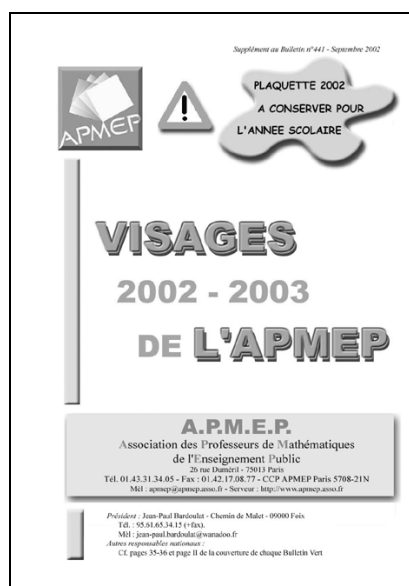
## UNE APPROCHE DES CONTENUS D'ENSEIGNEMENT PAR DES PROBLÉMATIQUES POUR LE SECOND CYCLE

Vous trouverez dans les pages qui suivent les explications introductives ainsi que quelques problèmes tirés de diverses problématiques développées dans cette brochure.

<b>Une autre entrée dans les programmes d'enseignement.....</b>	<b>2</b>
<b>Avant-propos ( mode d'emploi).....</b>	<b>8</b>
<b>Problèmes extraits de la problématique 3 : <i>Dynamique des points</i> <i>des figures et des nombres</i>.....</b>	<b>10</b>
<b>Un problème extrait de la problématique 6 : <i>Techniques algorithmiques</i>.....</b>	<b>12</b>
<b>Deux problèmes extraits de la problématique 10 : <i>Situations – Démarches</i>.....</b>	<b>15</b>

Vous trouverez **la liste des problématiques** page 10 de ce document.

Une description plus complète de cette brochure est détaillée dans la plaquette :



# UNE AUTRE ENTRÉE DANS LES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT

## 1. Introduction

Le “pourquoi” des savoirs, voire le “pourquoi l'école”, revient de façon lancinante dans la bouche des élèves de cette fin de siècle. Une réponse en termes d'objectifs satisfait certes leur attente de perspective, mais laisse ouvert le recours aux situations et aux moyens qui permettent d'atteindre ces objectifs. A travers une recherche menée depuis plus de dix ans dans le cadre de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public français (A.P.M.E.P.), nous avons tenté d'y répondre par une nouvelle cohérence dans l'énoncé des programmes, cohérence qui tente de prendre en compte, non seulement les contenus et les méthodes, mais aussi :

◆ les **objectifs spécifiques** des mathématiques pour des élèves de 11 à 15 ans, objectifs induits par les attentes et les besoins pluridisciplinaires, professionnels, quotidiens, se conciliant avec les finalités culturelles de l'école<sup>1</sup> (contribuer à la formation triple : l'homme, le citoyen, le travailleur) ;

◆ le **sens** que ces besoins et ces attentes entretiennent entre eux relativement aux notions enseignées, aux démarches, aux conduites développées, sens que les élèves sont susceptibles de leur attribuer ;

◆ la **fonction épistémologique** des notions et des démarches que celles-ci assurent, en particulier dans le développement de “l'esprit scientifique” et la provision de modèles ;

◆ des **activités** à travers **des situations** qui favorisent la mise en cohérence de l'ensemble dans des contextes variés.

Ce travail se poursuit à l'heure actuelle pour les classes du second cycle (15 à 18 ans).

## 2. La question du sens

L'énonciation et l'étude des **objectifs spécifiques** à travers de nombreux exemples ont déjà fait l'objet d'une tâche à laquelle l'A.P.M.E.P. a apporté sa contribution. Mais l'aspect institutionnel y est prépondérant.

Le **sens** pour les élèves, quant à lui, se nourrit à différentes sources :

- leur *histoire personnelle* ou celle de la classe, donc dans les relations que ceux-ci ont avec le savoir, relations qui passent par leur vécu dans le quotidien et par les situations d'enseignement ;
- leur *environnement scientifique, social et culturel* ;
- les *relations interconceptuelles et pluridisciplinaires*, relations évidemment plus objectivables que les précédentes.

Suivant le paradigme d'une théorie constructiviste de l'apprentissage, selon laquelle nous plaçons, le sens n'est alimenté et activé qu'à la faveur de **questions** que se posent ou peuvent se poser les élèves à partir de problèmes reconnus authentiques par eux, ni évidents, ni trop complexes. Il est optimisé en fonction de l'**enjeu** introduit par ces questions, aiguisé par le **défi**

---

<sup>1</sup> cf. « Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège ». Publication APMEP, Janvier 1985.

qu'éventuellement elles contiennent et par les *réponses* qui ont pu être proposées a priori par les élèves. Il est le moteur d'une authentique avancée didactique, et, par conséquent, de la construction et de l'appropriation (en son sens étymologique) des savoirs. L'histoire nous livre d'ailleurs que ce n'est dans ces conditions que la connaissance scientifique a pu se développer.

### 3. Une réponse didactique : la problématisation des savoirs

On peut alors percevoir la *fonction épistémologique* du renversement didactique qu'il faut opérer : si l'élève parvient à lui donner un sens qui la problématise, sa connaissance s'accroîtra plus par les réponses aux questions qu'il fera siennes (G. Brousseau parlerait ici de "dévolution du problème") que par celles qui lui restent artificielles et étrangères. Certes, il ne faut pas se bercer de l'illusion que ce renversement serait didactiquement aisé, voire possible relativement à tous les concepts qu'il est nécessaire de construire en sept années de secondaire. Mais la recherche obstinée de situations didactiques le favorisant devrait être payée d'un changement d'attitude transférable dans un champ assez large pour qu'il y devienne efficace.

A. C. Clairaut (1713-1765) nous propose dans "*Elémens de géométrie*" (1753) ce que E. Barbin appelle une "*géométrie problématisée*", c'est-à-dire dit-elle, « *une géométrie où les savoirs ont un sens parce qu'ils sont des instruments pour résoudre des problèmes* ». En ce sens, poursuit-elle, « *contrairement à Euclide qui donne au début de chacun de ses livres des Eléments une longue liste des définitions, Clairaut n'introduit les concepts qu'au fur et à mesure, au moment où les concepts deviennent nécessaires à la résolution d'un problème. De même l'impératif qui dicte l'ordre d'introduction des propositions est l'ordre déductif chez Euclide, alors que chez Clairaut il se situe dans la problématique choisie, c'est-à-dire la mesure des terrains (...). Les concepts et les savoirs sont construits comme réponses à des questions : ce sont des instruments pour résoudre des problèmes.(...).* Pour Clairaut, le savoir implique le processus par lequel on sait. »<sup>2</sup>

C'est donc, dans un champ de contraintes et de nécessités, que la construction d'une connaissance, comme solution d'un problème, peut apparaître justifiée et assimilable. Citons quelques exemples :

- la résolution d'une inéquation, voire d'un système d'inéquations, prend son sens et sa fonction dans le cadre de la recherche de valeurs conduisant à l'optimisation d'une relation entre différentes variables numériques ;
- des limites d'incertitude sur des valeurs d'une grandeur à partir de la donnée de l'incertitude sur une autre (ou plusieurs) qui la détermine (nt) permet de donner du sens à la continuité ;
- l'observation de régularités dans des situations aléatoires (tiercé, loto, ...) conduit à la notion de probabilité ;

---

<sup>2</sup> cf. « Sur la conception des savoirs géométriques dans les *Eléments de géométrie* » E. BARBIN, Edition bilingue rapport ERASMUS ICP-93 coordonnée par A. GAGATSI, Université de Thessalonique. Article cité par A. GAGATSI dans « Histoire de la géométrie en Grèce. L'influence des géomètres français de 1830 à 1884 » Repères n°17, octobre 1994.

– l'identification de caractères discriminants dans un ensemble d'objets (exemple : des figures ou des transformations géométriques) ou dans un ensemble d'individus prend surtout son sens dans la nécessité d'une organisation structurée, d'une création d'un support de mémoire (mental, écrit, informatique) et impliquant un problème de classification....

Ainsi, le renversement didactique évoqué plus haut affecte l'économie de l'élève. Grâce au sens qu'elles prennent par la nécessité, le coût, ni trop élevé, ni dérisoire, des opérations cognitives engagées par l'élève dans la résolution de problème ou, ce qui est équivalent pour construire une connaissance, se rembourse sur la consistance de celle-ci et sa durabilité, sur son efficacité dans des situations voisines ou sa transférabilité dans d'autres disciplines.

#### **4. Quel(s) statut(s) pour les contenus à enseigner ?**

Il est impératif de bien distinguer le statut des contenus visés : sont-ils des objets de savoirs culturels ? sont-ils des outils intellectuels pour résoudre des problèmes ? sont-ils les mieux adaptés à l'usage qu'il en sera fait ultérieurement (profession, vie courante, études supérieures) ? Peuvent-ils être, chacun d'entre eux, objet culturel et outil ? La réponse spécifiée par contenu change très sensiblement le traitement didactique qui en est fait.

*En tant qu'objet*, le concept nécessite une construction, une définition univoque, rattachée à un champ déterminé, éventuellement placé dans l'histoire de sa construction. Il est installé dans la mémoire de la classe à la faveur d'une institutionnalisation.

*En tant qu'outil*, le concept ou une relation entre concepts peuvent être considérés comme donnés par leurs pratiques dans le domaine des mathématiques ou bien dans celui d'autres disciplines ou encore dans l'environnement quotidien. C'est leur usage dans la résolution de problème qui en précisera, éventuellement et au fur et à mesure, leurs propriétés, leur efficacité mais aussi leurs limites de validité et en gommara le caractère préconstruit. Cet usage s'assortit d'un intérêt par rapport aux objectifs méthodologiques : démarches, modes de représentation, modes de raisonnement, etc. Par exemple, l'arithmétique offre des modes de raisonnement autres que ceux qui ont cours en analyse ou en algèbre, modes où l'exhaustion et la récurrence ont une place privilégiée. Mais également, des propriétés admises offrent une efficacité bien séduisante : par exemple, le théorème « *toute suite croissante majorée admet une limite* » permet de prouver l'existence d'un être mathématique sans l'exhiber, et peut-être même sans que l'on soit capable ou désireux de le calculer.

L'objectif ne serait cependant pas d'institutionnaliser, systématiquement et avant la sortie du lycée, le référent théorique, l'objet qui est sous-jacent.

C'est le cas, à notre avis des transformations dont le caractère outil apparaît clairement, mais non sans mal, dans les années 75-80, dans le premier cycle alors qu'il devrait adopter, affirme le programme actuel, un statut d'objet mathématique en second cycle. Cet impératif est relativement dommageable car l'assimilation est vaine et l'intérêt épistémologique incertain dans le secondaire. Nous pensons, en particulier, que la rotation ne devrait pas jouir d'une telle ambition didactique et devrait garder seulement l'usage dynamique qui pourrait suffire à appréhender les angles. C'est a

fortiori le cas pour la similitude. Par contre, introduire l'inversion, en tant qu'outil, à partir de problèmes carto ou photo-graphiques permettrait de donner a contrario du sens à la notion d'isométrie et de conservation de propriétés affines.

## 5. Vers le développement de l'esprit scientifique

Si le savoir implique le processus par lequel on sait, comme le dit Clairaut, quelles composantes didactiques doivent constituer les situations-problèmes dont nous devrions jalonner le temps d'enseignement ? Sans que ces composantes soient toujours nécessaires dans leur ensemble, voici celles qui nous paraissent constituer le plus souvent un processus d'apprentissage compatible avec notre volonté de développer ce qui est communément appelé "*esprit scientifique*" :

- partir du questionnement d'une situation, mais en inscrivant son sens dans une perspective théorique, conjecturer une réponse (éventuellement faire un pari), la formuler sous forme d'hypothèse avec les outils cognitifs à notre disposition au moment présent ;
- modéliser, et donc suspendre provisoirement le seul sens personnel en faveur d'une formalisation admise par le groupe-classe ;
- traiter la situation formelle, éventuellement changer de cadre de résolution, de registres d'expression et mettre en place de nouveaux outils ;
- interpréter les réponses et résultats obtenus, et, donc, restituer du sens ; éventuellement, réfuter une hypothèse, revenir sur la modélisation et la formalisation choisies ;
- participer à leur institutionnalisation, objectivation qui tient lieu de mise en accord intersubjectif ;
- expliquer, généraliser, anticiper, prévoir dans des situations comparables et donc élargir le sens du questionnement initial.

## 6. Des propositions

Ce que propose ici le groupe "Problématiques Lycée" est le fruit d'un travail commencé il y a une dizaine d'années, faisant suite à une réflexion relative aux programmes du 1<sup>er</sup> cycle et à leur enseignement, menée de façon analogue, dans le même cadre de l'A.P.M.E.P., au cours des années 80. Cette réflexion était restée cependant d'ambition plus modeste quant à la production de textes.<sup>3</sup> Le travail effectué dans ce groupe Lycée s'est renforcé des réflexions, travaux et expérimentations en œuvre dans le groupe "**Prospective Bac**" qui vise lui-même un renouvellement du contenu et des modalités de l'examen. En effet, on ne peut isoler enseignement et évaluation, tant l'influence de celle-ci sur le travail des élèves, sur les méthodes pédagogiques et sur les choix didactiques est fondamentale<sup>4</sup>. Il apparaît ainsi clairement, mais de façon regrettable, qu'en réalité l'état actuel des connaissances acquises par la majorité des élèves à la fin du 2<sup>ème</sup> cycle se réduit le plus souvent à ce qui leur est justement conseillé dans la préparation du bac et renforcé, pour l'essentiel, par les

---

<sup>3</sup> "Mathématiques au collège. Pour un renouvellement", supplément n°1 au BV de l'APMEP n°345, et "Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège", janvier 1985

<sup>4</sup> <http://www.apmep.asso.fr/bac.html>

problèmes qui y sont donnés. La stratégie la plus payante pour l'élève, de façon à peine caricaturale, se ramène à : « *par sécurité, algorithmisons nos connaissances, pour nous assurer la "moyenne", ne vous écartons pas du chemin qui nous conduit pas à pas à la solution, segmentons notre savoir comme le sont les questions du problème, ne perdons pas de temps à comprendre ses relations avec les autres disciplines, à changer de cadre lorsque ce n'est pas demandé, etc.* » Il est hors de question de condamner en cela les enseignants qui, pour des raisons déontologiques, doivent assurer, à travers la réussite maximale aux examens, un contrat social vis-à-vis de l'institution, des élèves et de leurs parents. Mais l'acrobatie pour échapper à la dérive "algorithmique" que nous dénonçons se nourrit actuellement de certaines illusions sur l'atteinte des objectifs généraux de l'enseignement secondaire et ne peut que se renforcer dans la diminution des horaires d'encadrement des élèves car il faudra bien « *ne pas perdre (?) de temps dans le temps d'apprentissage* ».

Notre proposition au sujet de la méthode de conception et de lecture d'un programme, sans être révolutionnaire, veut se construire, de façon originale, à partir de grandes classes de problèmes, de "problématiques", qui inscrivent objectifs, compétences et contenus plus en **ystème** qu'en une suite éclatée de chapitres de cours. Selon un principe constructiviste, les contenus doivent apparaître comme une issue et un moyen incontournables pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi<sup>5</sup>. C'est un renversement épistémologique par rapport à ce qu'un programme classique propose où le concept est d'abord introduit et où les problèmes d'application et de réinvestissement apparaissent ensuite.

Certes les libellés actuels de programme décrivent, en amont des contenus, des intentions générales, des lignes directrices, des objectifs, des capacités attendues. Particulièrement, le projet de programme de 1<sup>ère</sup> S présente une structuration des contenus qui, bien que timide, ne déclinant pas suffisamment ceux-ci des démarches attendues et oubliant de relier les mathématiques aux autres disciplines, montre cependant l'effort du G.E.P.S.<sup>6</sup> de mathématiques à coordonner "objectifs-capacités-contenus". Mais la présentation linéaire des autres programmes ne permet pas d'en voir les articulations qui en assureraient la cohérence et surtout ne décrit pas de façon aisément opérationnalisable des situations favorisant l'approche des connaissances visées, ni les démarches attendues des élèves, eu égard aux objectifs et aux capacités déclarés. Elle évoque bien quelques situations pluridisciplinaires ou environnementales, mais généralement plus comme alibi et de façon incantatoire, que comme lieu de conflits, de quêtes ou de défis, condition nécessaire à l'éveil de la curiosité et du plaisir de faire des mathématiques. Notre ambition est de construire, autour des problématiques majeures de tout l'enseignement des mathématiques du secondaire, un système cohérent qui, ***en faisant plus de place à la formation scientifique qu'à la culture mathématique*** sans la reléguer, coordonne trois composantes indissociables :

---

<sup>5</sup> cf. en particulier les travaux de Guy Brousseau à ce sujet

<sup>6</sup> Groupe d'Expert pour les Programmes Scolaires

*– des situations où l'activité de l'élève trouve sa place, situations suffisamment significatives pour que l'élève s'approprie le problème posé, pour qu'il y engage un coût cognitif ni trop élevé, ni dérisoire,*

*– des démarches, des attitudes scientifiques attendues de lui, satisfaisant les objectifs généraux et spécifiques des mathématiques,*

*– des savoirs visés à organiser en fonction de l'approfondissement défini par le niveau de la classe, par le rythme adopté par certains élèves, etc. Par suite, un même contenu pourra être enseigné ou "visité" plusieurs fois, mais à des niveaux ou dans des cadres différents.*

*Ainsi, un programme à notre sens devrait comporter dans son écriture, à chaque niveau scolaire, des préalables qui, à la suite des objectifs visés et des compétences attendues, distingueraient selon les dix problématiques que nous avons identifiées, les trois composantes énoncées ci-dessus<sup>7</sup>. On pourra remarquer, qu'à des détails de rédaction près, ce sont sensiblement les mêmes que celles que nous avons dégagées pour l'enseignement dans le Collège. Cette similitude devrait nous conforter dans le sentiment que les mathématiques enseignées ou à enseigner forment un tout, cimenté par les problèmes qu'elles permettent de résoudre en complexifiant peu à peu et au besoin leurs outils de résolution.*

*Voici les titres de ces problématiques pour le Lycée :*

***En référence privilégiée à des contenus :***

***1- Repérage.***

***2- Représentations figurales et/ou graphiques. Propriétés des modèles associés.***

***3- Dynamique des points, des figures et des nombres.***

***4- Mesure de grandeurs avec précision, approximation ou incertitude.***

***5- Traitement et représentation de données statistiques.***

***En référence privilégiée à des objectifs méthodologiques :***

***6- Techniques algorithmiques.***

***7- Changement de registres et de cadres.***

***8- Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.***

***9- Construction ou choix opportun et optimal des modèles, des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes pluridisciplinaires.***

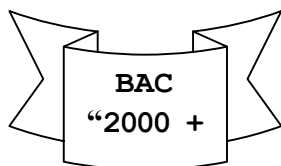
***10- Conjectures, preuves, réfutations et validations.***

---

<sup>7</sup> On trouve une approche comparable dans certains libellés de programmes où une présentation en trois colonnes associe dans l'ordre : contenus, exemples de situations, compétences. Mais cette présentation ne traverse pas toutes les filières, loin s'en faut. De plus, l'énoncé préalable des contenus démontre bien la centration sur ceux-ci et, par suite, annonce les dérapages didactiques où seront minorées les autres composantes.

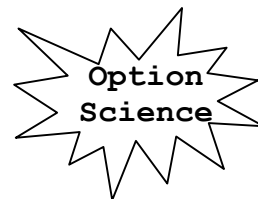
## Avant propos ...

Pour chaque problématique, nous indiquons, a priori, le niveau où certains exercices proposés nous semblent pouvoir être abordés. Cependant, cette indication n'est donnée qu'à titre indicatif car elle dépend bien entendu des contenus des programmes, du niveau des classes et des choix jugés opportuns par l'enseignant eu égard à ses objectifs. D'autres exercices sont sans indication de niveau car considérés d'un abord plus difficile et/ou hors des contenus présents et donc hors du champ des compétences actuelles de la plupart de nos lycéens, même en TS. Outre le fait qu'ils ont pour nous valeur d'exemples pour la problématique concernée, la présence et le choix de ces exercices trouvent également leur légitimité à nos yeux par le fait qu'ils représentent le type même d'exercices que nous pensons utile de voir aborder à plus ou moins long terme dans nos classes.



Ceci à condition, il va de soi, d'intégrer la pratique "**d'exercices avec prise d'initiative**" dans notre enseignement et donc dans nos évaluations (cf. le rapport de la commission baccalauréat de mathématiques –présidée par M. Paul Attali, IG de mathématiques – remis à la DESCO en juillet 2000<sup>8</sup>).

Certains exercices sont étiquetés "**option Sciences**" car ils ont été expérimentés dans cette option ou sont tout désignés à l'être selon nous)... (cf. le site de l'APMEP<sup>9</sup> ou le site du lycée Jean Monnet de Strasbourg)



Certes ces exercices devraient avoir leur place à part entière dans notre enseignement mais faute de temps et vu la très grande hétérogénéité des classes actuelles, ils risquent de disparaître de fait des activités des élèves. D'où la revendication récurrente de l'A.P.M.E.P. d'obtenir la **création d'une option Sciences** et de **retrouver des horaires décents en mathématiques respectant le temps d'apprentissage des élèves** eu égard aux objectifs affichés par l'institution et le rôle reconnu et universel des mathématiques dans le monde actuel.

Certains des exercices proposés tout au long de notre brochure sont "classiques" mais ils ont été retenus pour des raisons d'adéquation à la logique des "**problématiques**". D'autres sont plus originaux et élaborés en fonction du rôle que nous voulions leur faire remplir. Des pistes de solutions, voire des solutions, ainsi que des remarques didactiques les accompagnent le plus souvent. Une ou deux situations dites "**didactiques développées**" clôturent la suite d'exercices liés à la problématique, afin de rendre compte, plus amplement, de celle-ci à travers une véritable activité de classe.

<sup>8</sup> <http://www.apmep.asso.fr/bac.html>

<sup>9</sup> <http://www.apmep.asso.fr/OptSci1.html>



*Les auteurs de programmes pourront toujours nous objecter que leurs commentaires plaident pourtant clairement en faveur d'un tel enseignement à l'image de ceux du programme de Seconde entrés en application en septembre 2000 : « Prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes - en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration...) »... Mais comme pour les programmes précédents, où figuraient notamment les huit moments de l'activité mathématique (« formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence au regard du problème posé »), ces directives risquent fort, le plus souvent, de rester à l'état de vœux pieux... En effet, la réduction drastique des horaires de mathématiques entamée depuis le collège ces dernières années, et, par voie de conséquence, le manque chronique de temps dont nous disposons ne permettent pas à l'élève de réinvestir ses connaissances... sans compter que les sujets actuels du baccalauréat n'incitent guère à ce type de travail basé sur la recherche de problèmes !*

***Nous ne pouvons que le déplorer tout en espérant que cette brochure apportera une aide aux collègues et saura convaincre l'institution à s'engager enfin dans une voie dont l'objectif ne serait pas tant les contenus à peine survolés que la capacité à mettre en œuvre une démarche scientifique.***

\*\*\*\*\*

*La lecture critique, et éventuellement comme nous le souhaitons,  
la mise en œuvre dans la classe de nos suggestions  
ni fermées, ni exhaustives,  
doit conduire à un enrichissement continu des textes qui paraîtront dans  
cette brochure.*

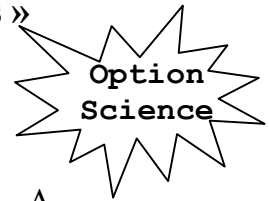
\*\*\*\*\*

## PROBLEMES EXTRAITS DU CHAPITRE PROBLEMATIQUE 3

« Dynamique des points, des figures et des nombres »

2<sup>nde</sup> / 1<sup>ère</sup>

\*\*\* 7 \*\*\*



ABC est un triangle équilatéral. On choisit un point quelconque M sur le petit arc  $\widehat{BC}$ . Démontrer que  $MA = MB + MC$ .

### Remarque et indication :

*Ce petit problème sert de prétexte à l'emploi efficace de la rotation. Pour engager les élèves dans la démonstration, il est bon de leur faire remarquer que cette propriété est indépendante de la position a priori de M sur l'arc  $\widehat{BC}$ .*

*La preuve suivante peut être avancée :*

*Soit I le point de [AM] tel que M soit équidistant de I et de B. Un tel point existe puisque  $MA > MB$ . Le triangle MBI est équilatéral et donc la rotation d'angle  $\pi/3$  et de centre B transforme I en M et A en C. Donc  $IA = MC$  et  $MB + MC = IM + IA = MA$ .*

*La difficulté réside ici en la prise d'initiative de placer le point I (ou J tel que  $MJ = MC$ ...) sur [AM]. Une telle initiative ne peut s'envisager qu'avec des élèves habitués à chercher des problèmes non stéréotypés, l'égalité  $MB + MC = MA$  pouvant alors, par association d'idée, les amener sur la piste de "l'inégalité triangulaire" dans le cas particulier où il y a égalité ("relation de Chasles" pour les longueurs). D'où l'idée de chercher à introduire un point I sur [AM], donc tel que  $MI + IA = MA$ , puis de faire en sorte que, par exemple,  $MI = MB$ , ce qui ramène le problème à devoir démontrer que  $IA = MC$ ...*

*Solution "calculatoire"<sup>10</sup> :*

$$AB^2 = (\overline{AM} + \overline{MB})^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overline{AM} \cdot \overline{MB}$$

$$\text{Or } \overline{AM} \cdot \overline{MB} = AM \times MB \times \cos(\overline{AM}, \overline{MB}) = -AM \times MB \times \cos(\overline{MA}, \overline{MB}) = -\frac{1}{2} AM \times MB$$

$$\text{D'où : } AB^2 = AM^2 + MB^2 - AM \times MB$$

$$\text{De même, on a : } AC^2 = AM^2 + MC^2 - AM \times MC \text{ et } CB^2 = CM^2 + MB^2 + CM \times MB$$

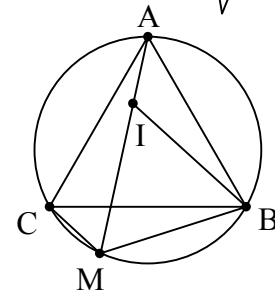
$$\text{On en déduit : } 2CB^2 - AB^2 - AC^2 = (MB + MC)^2 + AM \times (MB + MC) - 2AM^2 = 0$$

*C'est à dire, pour tout point M du petit arc  $\widehat{BC}$  :*

$$AM(MB + MC - AM) + (MB + MC - AM)(MB + MC + AM) = 0$$

$$\text{soit encore : } (MB + MC - AM)(2AM + MB + MC) = 0$$

ce qui implique, pour tout point M du petit arc  $\widehat{BC}$ , que  $MB + MC - AM = 0 \dots$



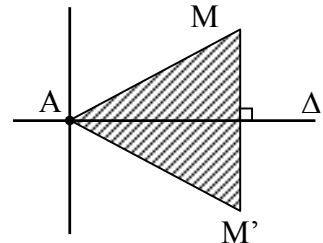
<sup>10</sup> Proposée par Jean-Pierre Kahane

Tale

\*\*\* 10 \*\*\*



Un point A est fixe sur une droite  $\Delta$ . Soit M un point variable du plan et son symétrique M' par rapport à  $\Delta$ . Quel est le lieu des points M tels que l'aire du triangle MAM' soit constante et égale à k ?



**Remarque et indication :**

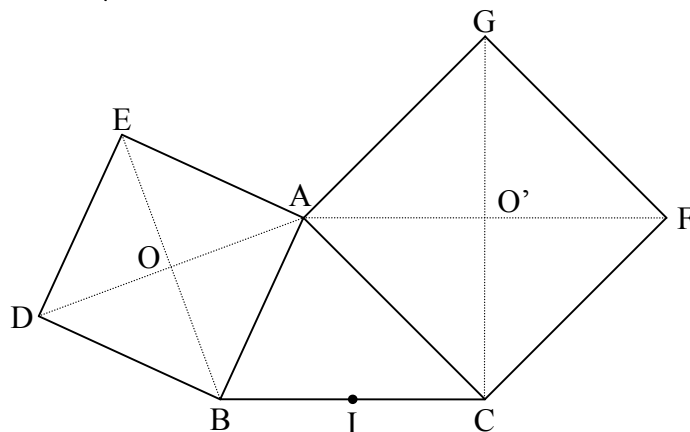
Les objectifs de cet exercice sont les suivants :

- placer la situation dans le plan convenablement repéré,
- constater et apprendre une propriété intéressante de l'hyperbole équilatère.

En effet, si l'on rapporte le plan à une origine en A, des axes orthonormés dont  $\Delta$  serait l'un d'eux, le lieu de M est l'hyperbole équilatère dont l'équation serait  $xy = k$  dans le repère choisi. Les axes de l'hyperbole sont ceux du repère.

2<sup>nde</sup>

\*\*\* 14 \*\*\*



On considère un triangle quelconque ABC. Sur les côtés [AB] et [AC] on construit les carrés respectifs : ABDE et ACFG. Soit O et O' les centres respectifs de ces carrés et I le milieu de [BC].

Démontrer que I est équidistant de O et O' et que les droites (IO) et (IO') sont orthogonales.

(à titre d'entraînement, on peut envisager de ne fournir dans l'énoncé que les triangles rectangles ABD et ACF au lieu des carrés)

**Remarque et indication :**

Montrer que  $IO = IO'$  peut inciter à vouloir utiliser une isométrie et étant donnée la figure de

l'énoncé, la rotation de centre A et d'angle  $+\frac{\pi}{2}$  n'est pas très difficile à exhiber. Cette rotation

transforme E en B, C en G et donc le segment [EC] en [BG] d'où l'on déduit que ces segments sont orthogonaux et de même longueur. Or [IO] joint les milieux de côtés du triangle EBC et [IO']

les milieux de côtés du triangle BGC. Donc  $IO = \frac{CE}{2} = \frac{BG}{2} = IO'$  et [IO] et [IO'] sont

orthogonaux car respectivement parallèles à [CE] en [BG].

Ce problème permet donc de faire fonctionner la rotation comme outil de preuve et de faire ainsi ressentir l'efficacité des transformations. Mais, il est fort possible que les élèves ne s'engagent pas d'emblée dans cette voie.

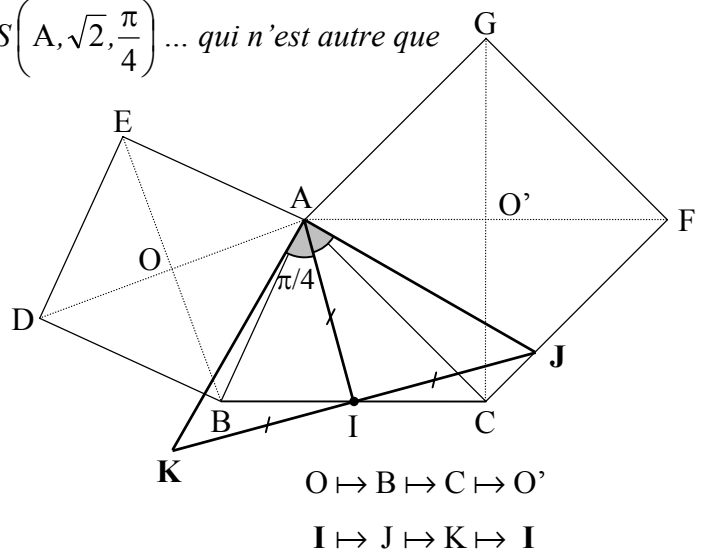
Depuis le "retour" des triangles isométriques dans les programmes de Seconde en 2000, les élèves peuvent aussi considérer les triangles AEC et ABG, montrer qu'ils sont isométriques (un angle de

même mesure compris entre des côtés deux à deux de même longueur) puis conclure de la même façon en utilisant la propriété bien connue de la droite des milieux d'un triangle...

En terminale, la maîtrise des nombres complexes permettra de résoudre le problème dans un autre cadre. En revanche, la similitude ne permet pas de résoudre simplement le problème posé.

On peut cependant utiliser  $S\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right) \circ S_1 \circ S\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \dots$  qui n'est autre que

$$S\left(I, 1, \frac{\pi}{2}\right) = R\left(I, \frac{\pi}{2}\right) \dots$$



## PROBLEMES EXTRAITS DE LA PROBLEMATIQUE 6

### « Techniques algorithmiques »

1<sup>ère</sup>

\*\*\* 8 \*\*\*

Les paraboles représentées ci-contre, dans le plan repéré, admettent des équations de la forme :

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \text{où } a_i \neq 0 \text{ pour } i \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

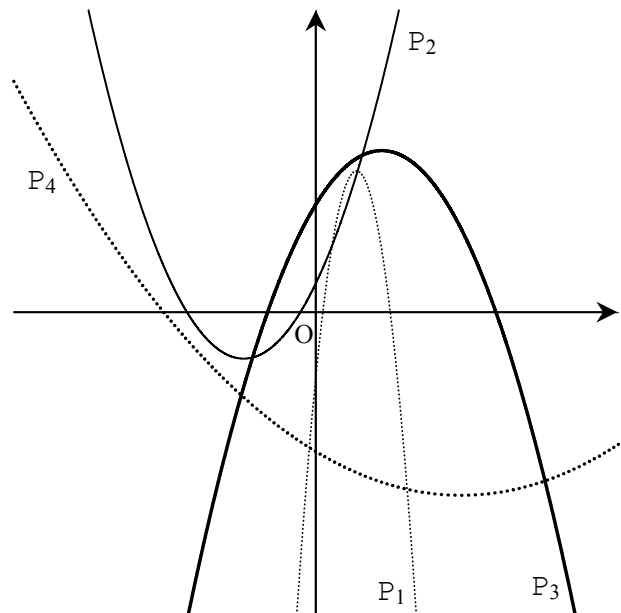
Utiliser à vue leur représentation graphique pour répondre aux questions suivantes :

1° Ranger les nombres réels  $c_i$ , puis les nombres

$$q_i = -\frac{b_i}{a_i} \text{ et enfin les nombres } a_i \text{ par ordre}$$

croissant.

2° Quels sont les signes des nombres  $b_i$  ?



#### Remarque et indication :

Les objectifs sont les mêmes qu'à l'exercice 7.

Les questions trouveraient une place intéressante en Première pour valider la compréhension de : la représentation graphique de la parabole, en particulier le rôle des paramètres de son équation,

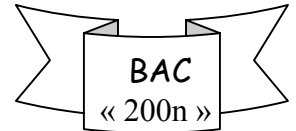
de l'algorithme  $a_i \left[ \left( x + \frac{b_i}{2a_i} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a_i^2} \right]$  et/ou de la dérivée du trinôme du second degré.

Réponses :  $c_4 < c_1 < c_2 < c_3$  (intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées) ;  
 $q_2 < q_1 < q_3 < q_4$  (double de l'abscisse du sommet de la parabole) ;  
 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$  ( $a > 0$  pour  $P_2$  et  $P_4$ ,  $a < 0$  pour  $P_1$  et  $P_3$  + "ouverture" de la parabole) ;  
 $b_1 > 0$  ;  $b_2 > 0$  ;  $b_3 > 0$  ;  $b_4 < 0$  ( $b_i$  du signe opposé de  $a_i \times q_i$ ).

À titre indicatif :  $\mathcal{P}_1$  a pour équation  $y = -15x^2 + 20x - 2$   
 $\mathcal{P}_2$  a pour équation  $y = 1,75x^2 + 4,2x + 1$   
 $\mathcal{P}_3$  a pour équation  $y = -1,5x^2 + 3,25x + 3,6$   
 $\mathcal{P}_4$  a pour équation  $y = 0,25x^2 - 1,2x - 4,6$

1<sup>ère</sup>

\*\*\* 10 \*\*\*



La courbe C est représentative de la fonction  $x \mapsto f(x)$  dans le plan repéré.

Que représentent les courbes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sachant qu'elles ne peuvent représenter que :

$x \mapsto f(x) + 2$ ,  $x \mapsto 2f(x)$ ,

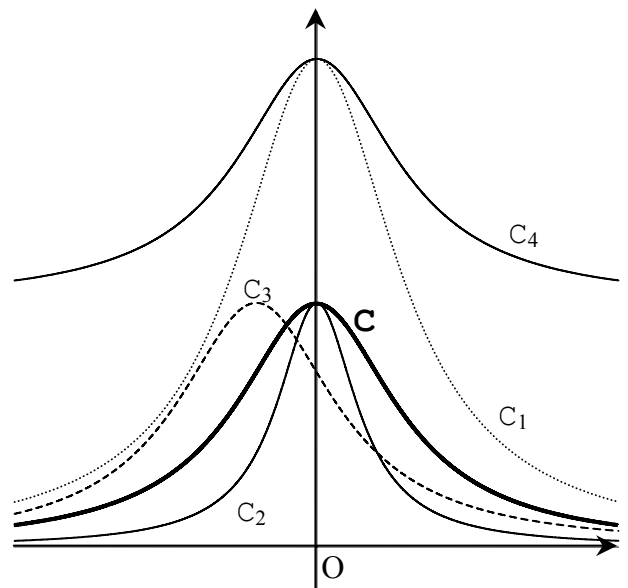
$x \mapsto f(x + 2)$  ou  $x \mapsto f(2x)$ .

Donner des arguments pour défendre vos choix.

**Remarque et indication :**

Il s'agit encore de décoder une famille de courbes en identifiant les critères qui les associeraient de façon privilégiée à l'une ou l'autre des fonctions proposées.

Les connaissances mobilisées sont relativement élémentaires et des élèves de Première devraient fournir des réponses correctes.



À titre indicatif : C a pour équation  $y = \frac{2}{0,1x^2 + 1}$ ,  $C_1$  a pour équation  $y = 2f(x)$ ,  $C_2$  a pour équation  $y = f(2x)$ ,  $C_3$  a pour équation  $y = f(x + 2)$  et  $C_4$  a pour équation  $y = f(x) + 2$ .

2<sup>nde</sup>/1<sup>ère</sup>

\*\*\* 21 : Un premier problème d'ordonnement \*\*\*

La construction d'un composant électronique nécessite l'exécution de six tâches distinctes. Les durées d'exécution de chaque tâche sont considérées ici comme négligeables mais les six tâches doivent se dérouler successivement de la façon suivante :

- ◆ la tâche 1 doit s'effectuer en premier ;
- ◆ la tâche 2 ne peut pas se conduire avant que 3 unités de temps ne se soient écoulées depuis la tâche 1 ;
- ◆ la tâche 3 nécessite que 5 unités de temps la séparent de la tâche 1 et 4 unités de la tâche 2 ;
- ◆ la tâche 4 exige un intervalle de 2 unités après le début de la tâche 2 et de 3 unités après celui de la tâche 3 ;
- ◆ la tâche 5 exige, quant à elle, que 2 unités de temps la séparent de la tâche 3 et de la 4 ;

- ◆ Enfin, la tâche 6 ne peut commencer que lorsque 5 unités se seront écoulées depuis le commencement de la tâche 4 et 1 unité depuis la tâche 5.

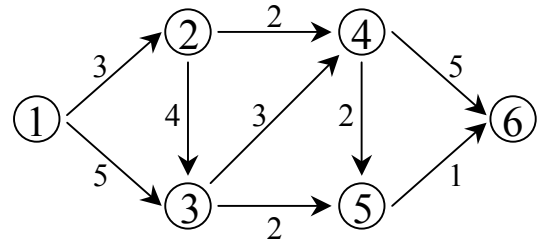
Représenter par un graphe le déroulement de ces 6 tâches en convenant que les *sommets* en soient les tâches et que toute *arête* qui joint deux sommets soit chargée de la pondération égale au temps qui sépare ses extrémités.

Chercher un algorithme permettant d'organiser le déroulement complet de la construction du composant :

- en calculant le temps minimal d'exécution totale de la construction,
- en désignant les sommets, dits critiques, où aucun délai n'est autorisé avant de passer à la tâche qui suit sans compromettre la durée minimale de l'exécution totale,
- en établissant le chemin, dit critique, qui joint ces sommets critiques.

### Remarque et indication :

Ce problème partage avec la problématique 7 (Changement de registres et de cadres) l'objectif de faire passer d'un registre "Langue naturelle" au registre "Graphes". En outre, et c'est le plus important, l'élève est conduit à élaborer et expérimenter lui-même un algorithme qui permettrait de traiter un cas plus complexe.



Voici ce que nous proposons en notant  $t_{ij}$  la durée

minimale séparant le sommet  $i$  du sommet  $j$  (par exemple :  $t_{34} = 3$ ) :

On commence par le sommet 1 : on affecte au sommet 1 la marque (0) et on pose  $c_1 = 0$ .

On se place au sommet 2 :  $c_1 + t_{12} = 3$  ; on affecte au sommet 2 la marque (3) et on pose  $c_2 = 3$ .

On se place au sommet 3 :  $c_1 + t_{13} = 5$  et  $c_2 + t_{23} = 7$  ; on affecte au sommet 2 la marque (7) et on pose  $c_3 = 7 = \sup_i(c_i + t_{i3})$  pour les sommets  $i$  précédant le sommet 3.

...

On se place à un sommet  $j$  quelconque. Les sommets  $i$  précédant le sommet  $j$  sont marqués par  $(c_i)$ .

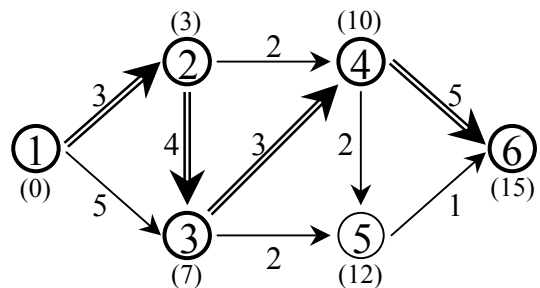
On examine toutes les arêtes  $i \rightarrow j$  qui aboutissent en  $j$ . On compare les marques  $c_i + t_{ij}$  et on

affecte le sommet  $j$  de la marque  $\sup_i(c_i + t_{ij})$  qui est le temps incompressible qui doit précéder  $j$  depuis le début 1. Le sommet qui correspond au maximum est critique.

On obtient donc les marques indiquées entre

parenthèses sur le graphe ci-contre. Les sommets critiques correspondent aux tâches 1, 2, 3, 4 et 6.

Le chemin critique passe par ces 5 sommets. Tout retard pris entre l'exécution de ces tâches affecte le temps minimal 15 total. En revanche, un retard d'une unité dans la tâche 5 ne change pas ce temps total.





*l'une des clés sera de passer de la définition en compréhension du terme de rang  $n$  de ces suites à leur expression en fonction de  $n$  :*

- La suite  $A$  des nombres entiers s'écrivant uniquement avec des "1" :

$$A_1 = 1, A_2 = 11, \dots, A_n = \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ chiffres } 1} \text{ ou encore } A_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

- La suite  $B$  des nombres entiers telle que :

$$B_1 = 15, B_2 = 105, \dots, B_n = \underbrace{1000 \dots 00}_{n-1 \text{ chiffres } 0} 5 \text{ ou encore } B_n = 10^n + 5.$$

- La suite  $C$  des nombres entiers telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$C_n = A_n \times B_n + 1 = \frac{10^n - 1}{9} \times (10^n + 5) + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \left( \frac{10^n + 2}{3} \right)^2$$

*D'où pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $\sqrt{A_n \times B_n + 1} = \frac{10^n + 2}{3}$ . Reste à s'assurer que l'on obtient bien un entier... ce qui se démontre par le fait que :*

$$\frac{10^n + 2}{3} = \frac{10^n + 3 - 1}{3} = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = 3 \times A_n + 1 !$$

Notre ambition est de construire, autour des problématiques majeures de tout l'enseignement des mathématiques du secondaire, un système cohérent qui, ***en faisant plus de place à la formation scientifique qu'à la culture mathématique*** sans la reléguer, coordonne trois composantes indissociables :

- *des situations où l'activité de l'élève trouve sa place, situations suffisamment significatives pour que l'élève s'approprie le problème posé, pour qu'il y engage un coût cognitif ni trop élevé, ni dérisoire,*

- *des démarches, des attitudes scientifiques attendues de lui, satisfaisant les objectifs généraux et spécifiques des mathématiques,*

- *des savoirs visés à organiser en fonction de l'approfondissement défini par le niveau de la classe, par le rythme adopté par certains élèves, etc. Par suite, un même contenu pourra être enseigné ou "visité" plusieurs fois, mais à des niveaux ou dans des cadres différents.*