La méthode de Daniel Ferand appliquée à un exemple de matrice 7x7

```
> restart;
with(linalg);
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

[*BlockDiagonal*, *GramSchmidt*, *JordanBlock*, *LUdecomp*, *QRdecomp*, *Wronskian*, *addcol*, *addrow*, *adj*, *adjoint*, *angle*, *augment*, *backsub*, *band*, *basis*, *bezout*, *blockmatrix*, *charmat*, *charpoly*, *cholesky*, *col*, *coldim*, *colspace*, *colspan*, *companion*, *concat*, *cond*, *copyinto*, *crossprod*, *curl*, *definite*, *delcols*, *delrows*, *det*, *diag*, *diverge*, *dotprod*, *eigenvals*, *eigenvalues*, *eigenvectors*, *eigenvects*, *entermatrix*, *equal*, *exponential*, *extend*, *ffgausselim*, *fibonacci*, *forwardsub*, *frobenius*, *gausselim*, *gaussjord*, *geneqns*, *genmatrix*, *grad*, *hadamard*, *hermite*, *hessian*, *hilbert*, *htranspose*, *ihermite*, *indexfunc*, *innerprod*, *intbasis*, *inverse*, *ismith*, *issimilar*, *iszero*, *jacobian*, *jordan*, *kernel*, *laplacian*, *leastsqrs*, *linsolve*, *matadd*, *matrix*, *minor*, *minpoly*, *mulcol*, *mulrow*, *multiply*, *norm*, *normalize*, *nullspace*, *orthog*, *permanent*, *pivot*, *potential*, *randmatrix*, *randvector*, *rank*, *ratform*, *row*, *rowdim*, *rowspace*, *rowspan*, *rref*, *scalarmul*, *singularvals*, *smith*, *stackmatrix*, *submatrix*, *subvector*, *sumbasis*, *swapcol*, *swaprow*, *sylvester*, *toeplitz*, *trace*, *transpose*, *vandermonde*, *vecpotent*, *vectdim*, *vector*, *wronskian*]

linalg est la bibliothèque de l'algèbre linéaire (nécessaire pour travailler sur les matrices)

1 - Entrée de la matrice A, à décomposer :

```
> A0 := matrix([
[1, 3, 0, 0, 3, -1, 1],
[2, 1, -4, 4, -1, 2, 0],
[-2, -6, -2, 1, -3, 1, -1],
[0, 0, -13, 8, -4, 7, -1],
[4, 6, -26, 18, -3, 12, 0],
[-4, -12, 9, -6, -5, -4, -2],
[-16, -30, 85, -59, 4, -39, -2]
]);
A:=A0;
eigenvectors(A);
```

$$A0 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 8 & -4 & 7 & -1 \\ 4 & 6 & -26 & 18 & -3 & 12 & 0 \\ -4 & -12 & 9 & -6 & -5 & -4 & -2 \\ -16 & -30 & 85 & -59 & 4 & -39 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A := A0$$

$$\left[I, 1, \left\{\left[\frac{-43}{97}-\frac{24}{97}I, \frac{18}{97}-\frac{8}{97}I, \frac{43}{97}+\frac{24}{97}I, 1, \frac{108}{97}-\frac{48}{97}I, \frac{-16}{97}+\frac{61}{97}I, \frac{-327}{97}+\frac{210}{97}I\right]\right\}\right],$$
$$\left[-I, 1, \left\{\left[\frac{-43}{97}+\frac{24}{97}I, \frac{18}{97}+\frac{8}{97}I, \frac{43}{97}-\frac{24}{97}I, 1, \frac{108}{97}+\frac{48}{97}I, \frac{-16}{97}-\frac{61}{97}I, \frac{-327}{97}-\frac{210}{97}I\right]\right\}\right],$$
$$[-1, 3, \{[0, 0, 1, 1, 2, 1, -5]\}], [1, 2, \{[-1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]\}]$$

2 - Calcul du polynôme caractéristique ChiA de la matrice A et de sa dérivée :

```
> ChiA:=X->charpoly(A,X):
'ChiA(X)'= ChiA(X);
dChiA:=X->subs(D(X)=1,D(ChiA(X))):
'dChiA(X)'=dChiA(X);
```

$$\mathrm{ChiA}(X) = X^7 + X^6 - X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + X + 1$$

$$\mathrm{dChiA}(X) = 7\,X^6 + 6\,X^5 - 5\,X^4 - 4\,X^3 - 3\,X^2 - 2\,X + 1$$

3 - Calcul du polynôme Q :

```
> divide (ChiA(X),gcd(ChiA(X),dChiA(X)),'Q'):
'Q'=Q;
dQ:=subs(D(X)=1,D(Q));
```

$$Q = X^4 - 1$$

$$dQ := 4\,X^3$$

4 - Calcul du deuxième terme de la suite :

```
> A:=evalm(A-subs(X=A,Q) &* inverse(subs(X=A,subs(D(X)=1,dQ))));
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & -6 & \frac{27}{2} & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & 12 & \frac{-33}{2} & 7 & -4 \\ 13 & 6 & -18 & 23 & \frac{-39}{2} & 13 & -4 \\ 24 & 12 & -24 & 36 & -13 & 12 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 1 & \frac{-33}{2} & 2 & -5 \\ -71 & -42 & 74 & -106 & \frac{45}{2} & -33 & -5 \end{bmatrix}$$

5 - Calcul des autres termes de la suite :

```
> p:=1:
B:=evalm(A0):
```

```
while rank(A-B) > 0 do
B:=evalm(A):
A:=evalm(A-subs(X=A,Q) &* inverse(subs(X=A,subs(D(X)=1,dQ))));
print(p,A=evalm(A));
print(`------------------------------------------------------------
-----------------`);
p:=p+1:
od:
N:=evalm(A0-A);
```

$$1, A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & -6 & \frac{27}{2} & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 6 & \frac{-27}{2} & 7 & -4 \\ 7 & 6 & -18 & 17 & \frac{-33}{2} & 13 & -4 \\ 12 & 12 & -24 & 24 & -7 & 12 & 0 \\ -5 & -6 & 4 & -5 & \frac{-27}{2} & 2 & -5 \\ -41 & -42 & 74 & -76 & \frac{15}{2} & -33 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2, A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & -6 & \frac{27}{2} & -7 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 6 & \frac{-27}{2} & 7 & -4 \\ 7 & 6 & -18 & 17 & \frac{-33}{2} & 13 & -4 \\ 12 & 12 & -24 & 24 & -7 & 12 & 0 \\ -5 & -6 & 4 & -5 & \frac{-27}{2} & 2 & -5 \\ -41 & -42 & 74 & -76 & \frac{15}{2} & -33 & -5 \end{bmatrix}$$

$$N := \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 & 6 & \frac{-21}{2} & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 5 & -5 & \frac{21}{2} & -6 & 3 \\ -7 & -6 & 5 & -9 & \frac{25}{2} & -6 & 3 \\ -8 & -6 & -2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & -1 & \frac{17}{2} & -6 & 3 \\ 25 & 12 & 11 & 17 & \frac{-7}{2} & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

>

Conclusion :

On constate que la suite se stabilise très vite (dès le rang 2) ce qui est conforme à la théorie qui permet de prévoir que la suite est stationnaire à partir du rang n si : $\dim(E) < 2^n$.

En fait, c'est même beaucoup mieux puisqu'il suffit de que 2^n dépasse r (où r est le plus grand ordre de multiplicité des valeurs propres). Ici r=3 donc la condition est : 2^n > 3, ce qui correspond à n >1.

On retrouve ainsi que la méthode de Newton à une rapidité de convergence "fabuleuse ou phénoménale" comme le dit Cédric Villani.