Durée : 4 heures

Baccalauréat C Reims juin 1970

EXERCICE 1

1. Résoudre l'inéquation

$$\text{Log}|x| < 1,$$

où le symbole Log désigne le logarithme népérien.

2. On considère la fonction f d'une variable réelle définie comme suit

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & f(x) = 2x - x\text{Log}|x| \quad \text{pour } x \neq 0,\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

Étudier la continuité de f, puis ses variations (pour l'étude à l'origine, on pourra poser $x = \dfrac{1}{X}$, où X tend vers l'infini).

3. Dans un repère orthonormé, construire la courbe représentant les variations de f.
Préciser la symétrie, la tangente au point d'abscisse zéro, les branches infinies.

EXERCICE 2

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation

$$\left(\frac{z-\text{i}}{z+\text{i}}\right)^3 + \left(\frac{z-\text{i}}{z+\text{i}}\right)^2 + \left(\frac{z-\text{i}}{z+\text{i}}\right) + 1 = 0.$$

EXERCICE 3

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit O$x$, O$y$ les axes associés.
À tout nombre réel, k, on associe la transformation ponctuelle notée T_k qui, à un point m de coordonnées $(x ; y)$ du plan (P), fait correspondre, s'il existe, le point M de coordonnées $(X ; Y)$ du plan (P), défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & \dfrac{x}{1-kx}\\ Y & = & \dfrac{y}{1-kx}\end{array}\right.$$

Partie A

1. Le nombre réel k étant donné, quels sont les points m de (P) pour lesquels $T_k(m)$ existe ?
2. Si k et k' sont deux nombres réels, quel est l'ensemble des points m de (P) tels que $T_{k'} \circ T_k(m)$ existe et quel est l'ensemble des points m de (P) tels que $T_{k+k'}(m)$ existe ?
Si et $T_{k+k'}(m)$ existent simultanément, montrer que $T_{k'} \circ T_k(m)$ et $T_{k+k'}(m)$ sont confondus.
3. Soit G l'ensemble des transformations T_k pour tous les nombres réels k.

a. La correspondance qui, au couple $(T_k,\ T_{k'})$, associe $T_{k'} \circ T_k$ est-elle une loi de composition interne sur G ?

b. Montrer que la correspondance qui, au couple $(T_k,\ T_{k'})$, associe $T_{k+k'}$ définit une loi de groupe sur G.

Partie B

Dans toute la suite du problème on suppose $k = 1$.

1. **a.** Quel est l'ensemble (Ω) sur lequel la transformation T_1 est définie ?

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par T_1.

c. Montrer que, pour tout point m appartenant à (Ω), les points m, $T_1(m)$ et O (origine des axes) sont alignés.

d. Montrer que T_1 admet une transformation réciproque.

2. Déterminer la figure (D_1) transformée de

$$(D) \cap (\Omega) \quad \text{par } T_1;$$

dans les cas suivants :

a. (D) est une droite parallèle à la droite Oy ;

b. (D) est une droite parallèle à la droite Ox ;

c. (D) est une droite qui n'est parallèle ni à la droite Ox ni à la droite Oy.

3. Montrer qu'il existe des points m que T_1 transforme en leur symétrique par rapport à O.

En déduire, compte tenu de la question B 1. b., une construction géométrique de la figure (D_1), transformée par T_1 de $(D) \cap (\Omega)$, si (D) est une droite non parallèle à la droite Oy, et une construction géométrique du transformé par T_1 d'un point quelconque m de (P) appartenant à (Ω).

4. Soit l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

où a et c sont deux nombres réels.

a. Montrer que cette équation représente un cercle de rayon non nul si, eL seulement si, $c < a^2$. Ce cercle sera noté $\left(C_{a,\ c}\right)$.

b. Quelle relation supplémentaire a et c doivent-ils vérifier pour que la figure transformée de $\left(C_{a,\ c}\right)$ par T_1 soit un cercle ? Préciser alors les valeurs de a pour lesquelles il peut en être ainsi.

c. (Question indépendante de la question b qui précède.)

Montrer que la figure transformée de $\left(C_{a,\ c}\right) \cap (\Omega)$ par T_1 passe par O si, et seulement si, $c = 0$.

Suivant les valeurs de a, discuter la nature géométrique de la figure C_1 transformée par T_1 de $\left(C_{a,\ 0}\right) \cap (\Omega)$.