∽ Baccalauréat C Reims juin 1973 ∾

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes $x'x$ et $y'y$.
Soit D_1 la droite d'équation $x + y\sqrt{3} = 0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3} - y = 0$.
Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan de coordonnées x et y. On appelle M_1 la projection, parallèlement à $x'x$, de M sur D_1 et M_2 la projection, parallèlement à $y'y$, de M sur D_2 ; a et b étant deux nombres réels non nuls, soit $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ le point défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{\text{O}M'} = a\overrightarrow{\text{O}M_1} + b\overrightarrow{\text{O}M_2}.$$

1. Calculer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Lorsque les nombres a et b sont fixés montrer que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point M fait correspondre le point M' est une bijection affine que l'on notera $T_{(a,b)}$.
3. Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$ l'application $T_{(a,b)}$ est-elle involutive ?
4. Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$ l'application $T_{(a,b)}$ est-elle une rotation de centre O ? Pour chaque couple $(a,\ b)$ trouvé, déterminer l'angle de cette rotation.

EXERCICE 2

Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que $a < b$ on appelle D le PGCD et M le PPCM de $(a,\ b)$.
Trouver l'ensemble des couples $(a,\ b)$ tels que $M - D = 77$.

PROBLÈME

On désigne par f_k la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f_k(x) = \frac{\text{Log}\,x}{x^2} - kx$$

et par $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (courbe qu'on ne demande pas d'étudier dans le cas général).
Dans tout le problème k est un nombre réel vérifiant

$$0 \leqslant k \leqslant 1 \quad \text{c'est-à-dire } k \in [0\ ;\ 1]$$

1. Pour $k \in [0\ ;\ 1]$ chercher la limite de $f_k(x)$ quand x tend vers 0, quand x tend vers l'infini ; préciser les asymptotes à $\mathcal{C}_k$.
   Faire la même étude (limites et asymptotes), pour $k = 0$.
2. Montrer que la fonction dérivée f_k' de f_k peut être définie par

$$f_k'(x) = \frac{\varphi_k(x)}{x^3}$$

   où $\varphi_k(x) = 1 - kx^3 - 2\,\text{Log}\,x$.
   Étudier les variations de φ_k. Montrer qu'il existe un réel unique α_k tel que

$$\varphi_k\left(\alpha_k\right) = 0$$

   Montrer de plus que

$$1 \leqslant \alpha_k \leqslant \sqrt{\text{e}}$$

Déduire de l'étude de φ_k le tableau de variations de φ_k.

Donner une expression de $f_k(\alpha_k)$ ne contenant pas de logarithme.

3. Écrire l'équation de la tangente D_k à $\mathscr{C}_k$ au point $M\left[x_0\ ;\ f_k(x_0)\right]$.

Montrer que pour x_0 fixé et k décrivant l'intervalle $[0\,;\,1]$, il existe un point dont les coordonnées sont indépendantes de k et qui appartient à toutes les droites D_k.

4. **a.** Construire $\mathscr{C}_0$

b. Soit h un réel tel que $h > 1$; en utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $S(h)$ de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & h \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f_0(x) \end{array}\right.$$

Quelle est la limite de $S(h)$ quand h tend vers l'infini ?

N. B. : La quatrième question peut se traiter indépendamment des questions précédentes.