Baccalauréat C Reims juin 1980

EXERCICE 1 **3,5 POINTS**

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère l'endomorphisme φde E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(-10\overrightarrow{\imath} - 4\overrightarrow{\jmath} + 8\overrightarrow{k}\right)\\ \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(8\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - 16\overrightarrow{k}\right)\\ \varphi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & \frac{1}{3}\left(-4\overrightarrow{\imath} - 4\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\right)\end{array}\right.$$

1. Soit $F = \{\overrightarrow{u} \in E \mid \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = 2\overrightarrow{u}\}$. Montrer que F est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur directeur.
2. Soit $G = \{\overrightarrow{u} \in E \mid \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = -2\overrightarrow{u}\}$. Montrer que G est un plan vectoriel que l ?on déterminera.
3. En déduire que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d ?une symétrie vectorielle à déterminer.
4. Soit P le plan vectoriel engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}.$$

   Montrer que P est globalement invariant par φ.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et M un point du plan complexe d ?affixe $m = a + \mathrm{i}b\,(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$.
On considère l'équation

$$z^3 + (2-\mathrm{i})z^2 + \left(m^2 + 1 - 2\mathrm{i}\right)z - \mathrm{i}\left(1 + m^2\right) = 0. \qquad (E_m)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) après avoir vérifié qu'elle admet pour racine $z_1 = \mathrm{i}$.
2. Trouver l'ensemble (Γ) des points M d'affixe $m = a+\mathrm{i}b$ tels que l'équation (E_m) admette au moins deux racines de même module. Représenter l'ensemble (Γ).

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} \quad \text{où } n \text{ est un paramètre, } n \in \mathbb{N}^\star.$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité 5 cm.

On prendra pour e la valeur approchée 2,7 et pour $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la valeur 0,6.

1. Donner la tableau de variation de f_n.

2. a. Montrer que la dérivée seconde de f_n s'annule pour deux valeurs opposées a_n et b_n. On note A_n et B_n les points de (C_n) d'abscisses respectives a_n et b_n.

   b. Montrer que quand n varie dans $\mathbb{N}^\star$, les points A_n et B_n restent sur une même droite.

   c. Montrer que quand n varie dans $\mathbb{N}^\star$, les tangentes en A_n et B_n à la courbe (C_n) passent par un point fixe que l'on déterminera.

3. Tracer dans le repère $\mathcal{R}$, les courbes (C_1) et (C_3). On placera en particulier les points A_1, B_1, A_3, B_3.

Partie B

Soit α un réel strictement positif. On pose

$$u_n = \int_0^\alpha \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t,$$

pour tout n de $\mathbb{N}^\star$. On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. Justifier l ?existence de la suite (u_n). Donner son sens de variation.
2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $n > 2$. Démontrer élémentairement l'inégalité

$$\int_0^{\alpha\frac{1}{\mathrm{Log}\,n}} \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{Log}\,n}.$$

   b. Montrer qu'il existe un entier n_0, tel que pour $n > n_0$ on ait $\dfrac{1}{\mathrm{Log}\,n} < \alpha$.

   Montrer que l'on a alors

$$0 < \int_{\frac{1}{\mathrm{Log}\,n}}^{\alpha} \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{Log}\,n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n}{(\mathrm{Log}\,n)^2}}.$$

3. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\mathrm{Log}\,x)^2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$).

   b. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie C

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer explicitement la fonction F.

1. Étudier le sens de variation de F.
2. Démontrer que $(\forall t > 1)$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

   En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$.

   On admettra que $\ell = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Donner l'allure du graphique de F sur une figure séparée.