**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Reims juin 1969

### EXERCICE 1

1. Montrer que, si $a$ est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et si $n$ est un entier positif, on peut écrire

$$\text{Log}\, na^n = n\text{Log}\, a\left(1+\frac{\text{Log}\, n}{n}\times\frac{1}{\text{Log}\, a}\right).$$

En déduire que $na^n$ tend vers zéro quand $n$ tend vers $+\infty$ ($a$ étant fixé et compris strictement entre 0 et 1).

2. On appelle $S_n(x)$ la somme des $n$ premiers termes de la progression géométrique qui a pour raison $x$ et pour premier terme $x$ ($x$ réel différent de 1).
De l'expression de $S_n(x)$ déduire une expression de

$$P_n(x) = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

Déterminer la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de $P_n(x)$ pour $x$ réel fixé entre 0 et 1.

### EXERCICE 2

On appelle $F$ la transformation qui, à tout nombre complexe $z = x+\text{i}y$, associe le nombre

$$\text{e}^x(\cos y+\text{i}\sin y) = F(z).$$

1. Calculer $x$ et $y$ en fonction du module, $r$, et de l'argument, oc, de $F(z)$. Établir une relation suffisante entre $z$ et $z'$ pour que $F(z) = F(z')$. Déterminer une partie, E, de $\mathbb{C}$ telle que $F$ soit bijective de E sur $\mathbb{C}-\{0\}$.
2. Soit $T(z)$ la translation plane associée à $z = x+\text{i}y$ (c'est-à-dire celle qui, dans un repère orthonormé, est définie par le vecteur de composantes $x$ et $y$). Soit $S(z)$ la similitude associée au nombre $Z = F(z)$ (c'est-à-dire celle qui a pour centre O, pour rapport $r$ et pour angle $\alpha$).
   - **a.** Montrer que $T(z+z')$ est la composée de $T(z)$ et de $T(z')$ et que $S(z+z')$ est la composée de $S(z)$ et $S(z')$.
   - **b.** Peut-on dire que la correspondance qui à $T(z)$ associe $S(z)$ réalise un isomorphisme du groupe des translations planes sur le groupe des similitudes planes ? Justifier la réponse.

### PROBLÈME

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O$x$, O$y$) on considère la famille, $F$, des coniques d'axe O$x$ qui passent par le point A de coordonnées (+2 ; +4) et sont tangentes à la droite (qui passe par A) d'équation

$$x-2y+6 = 0.$$

1. Déterminer l'équation générale de ces coniques et montrer que la famille $F$ contient un cercle, une parabole et une hyperbole équilatère.

**2.** On considère l'hyperbole $(H)$ d'équation

$$y^2 - x^2 = 12$$

et on la coupe par une droite variable $(D)$ d'équation $y = x + t$ ($t$ étant un paramètre réel).

**a.** Montrer qu'à toute valeur de $t$ correspond, en général, un point d'intersection $I(t)$ et un seul ; exprimer les coordonnées de ce point en fonction de $t$.

**b.** On associe à $t$ le point $M = I(t)$ et le point $M' = I\left(-\dfrac{4}{t}\right)$. Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction de $t$.

Déterminer l'ensemble (L) formé par les milieux des segments $MM'$ quand $t$ varie.

Montrer que la direction de la droite $MM'$ est indépendante de $t$.

**c.** On appelle B le symétrique de A par rapport à l'origine et Q le point d'intersection des droites A$M$ et B$M'$. Déterminer l'équation de l'ensemble, (K), des points Q (on pourra montrer que les pentes de A$M$ et B$M'$ sont liées par une relation indépendante de $t$).

Montrer que l'équation de (K) peut se mettre sous la forme

$P_1(x,\ y) \cdot P_2(x,\ y) = 0$ (où $P_1$ et $P_2$ sont des polynômes). Retrouver la nature de (K) par un raisonnement géométrique.

**3.** La portion $(C)$ de $(H)$ formée des points dont l'ordonnée est positive est la courbe représentative d'une fonction $f$.

**a.** Déterminer une constante $A$ telle que la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \frac{x}{2} f(x) + A\mathrm{Log}\,[x + f(x)]$$

soit une primitive de $f$.

**b.** Calculer l'aire du domaine plan compris entre $(C)$ et les trois droites d'équations respectives

$$x = 0, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad y = x.$$