Baccalauréat C Reims juin 1971

EXERCICE 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f qui, à x supérieur à 1, fait correspondre

$$f(x) = \text{Log}\,(\text{Log}\,x),$$

où Log désigne le logarithme népérien.

2. Établir les inégalités suivantes :

$$0 < \text{Log}\,[\text{Log}\,(k+1)] - \text{Log}\,[\text{Log}\,k] < k\text{Log}\,k$$

pour tout k entier supérieur ou égal à 2, en appliquant le théorème des accroissements finis à f entre k et $(k+1)$.

3. On pose

$$S_n = \frac{1}{2\text{Log}\,2} + \frac{1}{3\text{Log}\,3} + \ldots + \frac{1}{n\text{Log}\,n}$$

Utilisant la question 2, établir que $S_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 2

1. Établir que $\left(24n^2 + 8n\right)$ est divisible par 16, quel que soit l'entier n positif ou nul.
En déduire que $(2n+1)^4$ est congru à 1 modulo 16.

2. Montrer que, si a est un entier positif ou nul, a^4 est congru à 1 ou à 0, modulo 16.
En déduire que, si le nombre $16n+15$ (n entier positif ou nul) est mis sous forme d'une somme de k puissances quatrièmes d'entiers ; soit

$$16n + 15 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_k^4,$$

alors, nécessairement, il faut $k \geqslant 15$.

PROBLÈME

(P) est un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; soit Ox et Oy les axes associés.
Dans (P) on donne les points A$(d~;~0)$ et B$(-d~;~0)$, d étant un nombre réel strictement positif.
Dans tout le problème, k et α sont deux nombres réels qui satisfont aux conditions générales

$$k > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$$

et éventuellement à des conditions supplémentaires, qui seront précisées par l'énoncé.

Partie A

Au couple $(k~;~\alpha)$ on fait correspondre le point m de (P) dont les coordonnées sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l c l} x &=& d\dfrac{1-k}{1+k}\\ y &=& d\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}.\end{array}\right.$$

1. Montrer que m appartient à l'intérieur (I) d'un carré, défini par

$$-d < x < d \quad \text{et} \quad -d < y < d.$$

2. Réciproquement, montrer que, m étant donné dans (I), les formules (1) lui font correspondre un couple $(k\ ;\ \alpha)$ unique.
Quel couple correspond au point O de (P) ?

Partie B

1. Déterminer l'équation du cercle (C), ensemble des points M de (P) tels que $\dfrac{M\text{A}}{M\text{B}} = k$ (k donné différent de 1).
Déterminer l'équation du cercle (Γ), ensemble des points M de (P) tels que $(M\text{A}, M\text{B}) \equiv \alpha$ [modulo π] (α donné différent de 0).
(On pourra exprimer $\text{tg}\,\alpha$ en fonction de x, y et d. On trouvera l'équation de (Γ) :

$$x^2 + y^2 + 2dy\,\text{cotg}\,\alpha - d^2 = 0.)$$

2. Soit (E) la région extérieure du disque limité par le cercle de diamètre AB, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\text{O}M > d$.
Montrer géométriquement qu'à tout couple $(k\ ;\ \alpha)$ distinct du couple $(+1\ ;\ 0)$ correspond un point M de (E) et un seul tel qu'on ait simultanément

$$\frac{M\text{A}}{M\text{B}} = k, \qquad (M\text{A}, M\text{B}) \equiv \alpha [\text{modulo}\,\pi].$$

Partie C

On appelle (I') l'intérieur, privé du point O, du carré défini à la partie A, question 1. et l'on considère l'application f de (I') dans (E) qui à m associe M de la façon suivante :
au point m on fait correspondre le couple $(k\ ;\ \alpha)$, défini à la partie A, question 2, et à ce couple $(k\ ;\ \alpha)$ on fait correspondre M défini à la partie B, question 2. [Ainsi, à tout point m de (I') correspond par f un point M de (E).]
Soit D le point dont les coordonnées sont $(d\ ;\ d)$ et D' le point dont les coordonnées sont $(-d\ ;\ -d)$.
On désigne par (ℓ) le segment DD' privé des points D, D' et O.
On se propose de chercher la transformée (L) de (ℓ) par f.

1. Montrer que pour tout point m de (ℓ) on a

$$k = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Montrer que le cercle (C) [défini à la partie B, question 1.] a alors pour équation, en fonction de α,

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - \frac{2d}{\sin\alpha}x + d^2 = 0.$$

3. Calculer les coordonnées des points communs aux cercles (C) et (Γ). (Γ) étant le cercle dont l'équation a été trouvée à la partie B, question 1.,

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 + 2dy\,\text{cotg}\,\alpha - d^2 = 0.$$

Préciser celui des deux points communs qui appartient à (E).

4. Vérifier que (L) est une partie de la courbe dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = d^2.$$

Préciser de quelle partie il s'agit et la représenter dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.