Durée : 4 heures

Baccalauréat C Reims juin 1972

EXERCICE 1

On pose, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{Log}\,|x|, & \text{pour} \quad x \neq 0,\\ 0, & \text{pour} \quad x = 0.\end{cases}$$

1. Étudier la fonction f (en particulier, est-elle continue et dérivable en 0), et tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.
2. Calculer l'aire arithmétique du domaine limité par la droite d'équation $y = 0$ et la courbe (C), d'une part, les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$, d'autre part. (On pourra intégrer par parties.)

EXERCICE 2

1. Soit A l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que

$$3x - 4y = 0.$$

   Déterminer A (autrement dit, résoudre l'équation).
   Le sous-ensemble, A, de $\mathbb{R}^2$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) en est-il un sous-espace vectoriel ?
2. Soit B l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que $3x - 4y = 2$.
   Déterminer B (autrement dit, résoudre l'équation).
   Le sous-ensemble, B, de $\mathbb{R}^2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

PROBLÈME

1. **a.** On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui, dans la base $(1\,;0)$, $(0\,;1)$, est représentée par la matrice

$$t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   Quel en est le noyau ? Quelle est la matrice de l'application réciproque ?

   b. Soit (P) un plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V}\right)$. Soit T la transformation de (P) qui, au point de coordonnées $(x\,;\,y)$, associe le point de coordonnées $X\,;\,Y)$ telles que

$$X = x\sqrt{3} - y \quad \text{et} \quad Y = x + y\sqrt{3}.$$

   Montrer que T est une similitude, dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

   c. Soit (E) l'ensemble des points de (P) dont les coordonnées $(X\,;\,Y)$, dans le repère $\mathcal{R}$, vérifient la condition

$$7X^2 + 13Y^2 - 6\sqrt{3}XY - 24X - 8\sqrt{3}Y - 16 = 0.$$

   Soit (e) l'image réciproque de (E) par T. Montrer que (e) est une conique, dont on précisera la nature et le centre.

2. On pose, pour tout point m de (P), de coordonnées x et y dans le repère $\mathscr{R}$,

$$\rho = \mathrm{O}m \quad \text{et} \quad \theta = \left(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{\mathrm{O}m}\right)$$

(de sorte que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$).

On considère la conique de (P) d'équation

$$(x - \sqrt{3})^2 + 4y^2 = 4.$$

a. Montrer que cette équation se met sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\theta}.$$

b. Quel est (dans le repère $\mathscr{R}$) le nombre complexe associé à la transformation T (c'est-à-dire le nombre complexe, α, tel que l'on ait $X + \mathrm{i}Y = \alpha(x + \mathrm{i}y)$, pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels) ?

Écrire sous forme trigonométrique l'affixe z d'un point m de la conique précédente.

Calculer l'affixe Z de son transformé $M = T(m)$; donner la partie réelle $X = f(\theta)$ et la partie imaginaire $Y = g(\theta)$ de Z.

Donner, sans aucun calcul, la relation indépendante de θ liant $X = f(\theta)$ et $Y = g(\theta)$.

3. Le plan (P) est toujours muni du repère $\mathscr{R}$.

a. Quelle est la matrice, r, associée à la rotation, R, de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$?

Quelle est la matrice, a, associée à la transformation, A, qui, au point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point de coordonnées $(x\ ;\ 2y)$?

Soit S la transformation $\mathrm{R} \circ \mathrm{A} \circ \mathrm{R}^{-1}$. Calculer la matrice, s, qui lui est associée.

b. On note t la matrice définissant la transformation T. Calculer st et ta.

Quelle est la nature géométrique de l'image de la conique (e) par la transformation $\mathrm{S} \circ \mathrm{T}$?

4. Soit m un mobile dont les coordonnées sont données en fonction du temps τ par

$$x = \sqrt{3} + 2\cos\tau \quad \text{et} \quad y = \sin\tau.$$

a. Quelle est la trajectoire de m ? Calculer, à l'instant τ, les vecteurs vitesse et accélération de m.

b. En quels points de la trajectoire le mobile a-t-il un vecteur accélération orthogonal au vecteur vitesse ?