Baccalauréat C Reims juin 1974

EXERCICE 1

Soit f l'application de $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, dans lui-même définie par :

$$f(z) = z^3 + (1-5\text{i})z^2 - 2(5+\text{i})z + 8\text{i}$$

1. Calculer $f(2\text{i})$. En déduire que $f(z)$ peut s'exprimer comme produit d'un polynôme de degré un par un polynôme de degré deux de la variable z.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0 \quad (1)$.
   Calculer le module et l'argument de chacune des solutions.
3. On désignera par z_1, z_2, z_3 les racines de l'équation (1), z_2 étant la seule racine d'argument $\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   Établir que $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ et $(z_3,\ z_2,\ z_1)$ sont des suites géométriques dont on déterminera la raison.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique de la variable réelle x :

$$x \longmapsto f(x) = \sin x \operatorname{Log}(\cos x)$$

1. Étudier les variations de cette fonction lorsque x décrit le segment $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$; on aura à utiliser le signe de $\operatorname{Log}(\cos x)$.
2. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \operatorname{Log}(\cos x)\,\text{d}x$$

   (On pourra utiliser une intégration par parties).
   En déduire, dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, l'aire de la partie de ce plan comprise entre l'axe $x'\text{O}x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ et la courbe représentative de la fonction f.

PROBLÈME

Partie A

Il est rappelé que l'ensemble $\mathcal{M}_{2\times 2}$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire, la matrice unité étant
$\text{I} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix}5&4\\-4&-3\end{pmatrix}$.

Soit E l'ensemble des matrices M de la forme $M = aA + b\text{I}$ où a et b sont des nombres réels arbitraires.

1. **a.** Établir que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux.

b. Démontrer la relation : $A^2 - 2A + \mathrm{I} = 0$ où 0 désigne la matrice nulle.

En déduire que E est une partie stable de $\mathscr{M}_{2\times 2}$ pour la multiplication et que E est muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

Établir que A est une matrice inversible et que la matrice inverse A^{-1} appartient à E. Toute matrice M est-elle inversible ?

2. a. Résoudre dans E l'équation de la variable M : $M^2 = M$.

b. Établir que si M n'est pas inversible, ${}^{M}2 = 0$.

3. a. On pose $A^0 = \mathrm{I}$, $\quad A^1 = A$ et pour tout n entier, $n \geqslant 2$, $A^n = A^{n-1} \times A$.

Calculer A^2, A^3, A^4 en fonction de A et de I.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$A^n = a_n A + b_n \mathrm{I}$$

où a_n et b_n sont deux entiers relatifs que l'on déterminera.

c. À l'entier naturel non nul n on associe la matrice

$$B_n = \sum_{i=1}^{i=n} A^i = A + A^2 + \ldots + A^1 + \ldots + A^n$$

Donner en fonction de n, les coordonnées de B_n dans la base (A, I) de E.

Partie A

Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ et l'on désigne par $f_{a,\, b}$ l'endomorphisme de P de matrice $M = aA + b\mathrm{I}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1. a. Comment faut-il choisir a et b pour que $f_{a,\, b}$ ne soit pas bijective ?

b. Démontrer que toutes les applications $f_{a,\, b}$ non bijectives, distinctes de $f_{0,\, 0}$ admettent le même noyau K et le même ensemble image Im. Déterminer K et Im ; que remarque-t-on pour ces deux ensembles ?

2. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ deux vecteurs de P.

a. Montrer que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une base de P.

b. On considère l'application $f_{\frac{1}{8},\, -\frac{1}{8}}$. Déterminer la matrice de cette application linéaire dans la base $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

c. Soit s et p les endomorphismes de P suivants : s est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite D de base $\overrightarrow{\imath}$; p est la projection vectorielle sur la droite D' de base $\overrightarrow{v}$ dans la direction de la droite D'' de base $\overrightarrow{u}$.

Établir que : $f_{\frac{1}{8},\, -\frac{1}{8}} = p \circ s$.

($\circ$ désignant la loi de composition des applications).