

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C juin 1975 Reims œ

EXERCICE 1

1. Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n .
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

$$N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1} \text{ est divisible par 9.}$$

EXERCICE 2

On désigne par P un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit S_α la transformation qui, à un point M de P , de coordonnées $(x; y)$, fait correspondre le point M_1 dont les coordonnées $(x_1; y_1)$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

1. Trouver les valeurs de α pour lesquelles S_α n'est pas bijectif et déterminer, pour chacune de ces valeurs, l'image de S_α ainsi que l'ensemble des points M pour lesquels $S_\alpha(M) = O$.
2. M étant fixé, distinct de O , déterminer l'ensemble E des points M_1 transformés de M par S_α lorsque le paramètre α décrit \mathbb{R} .
Comment faut-il choisir M pour que E contienne le point O .

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\text{Log } x} & \text{pour } x \text{ strictement positif et distinct de } 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Étudier f : continuité, dérivabilité, sens de variation, représentation dans un repère orthonormé. (On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère, en étudiant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives). x

2. On pose,

$$\text{pour } 0 \leq x < 1 \quad F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$$

$$\text{et, pour } x > 1 \quad G(x) = \int_2^x f(t) dt$$

Que vaut $F'(x)$? Que vaut $G'(x)$?

(On ne cherchera pas à calculer des expressions de $F(x)$ et de $G(x)$).

Dire pourquoi on n'a pas le droit d'écrire $F'(x) = G'(x)$.

Partie B

On pose, pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$H(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$$

f étant la fonction définie dans A.

1. **a.** Montrer que $H(x)$ est toujours positif ou nul.
- b.** Montrer que $H(x)$ s'exprime, suivant les cas, à l'aide de la fonction F ou à l'aide de la fonction G .
En déduire l'expression de $H'(x)$ pour $0 < x < 1$, puis pour $x > 1$
- c.** Soit φ une fonction numérique définie et continue sur $]0; 1[$.
Établir que $\int_x^{x^2} \varphi(t) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. (On pourra désigner par Φ une primitive de φ).
En déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

2. On pose, pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$K(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \operatorname{Log} t} dt.$$

- a.** Calculer la dérivée de la fonction qui, à x strictement positif et distinct de 1, fait correspondre $\operatorname{Log} |\operatorname{Log} x|$.
En déduire que $K(x)$, qu'on calculera, garde une valeur constante, qu'on précisera, quand x varie dans $]0; 1[$ et dans $]1; +\infty[$.
- b.** On pose pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$\varphi_1(x) = \frac{x-1}{x \operatorname{Log} x}$$

Montrer que $\varphi_1(x)$ tend vers une limite ℓ , qu'on précisera, lorsque x tend vers 1. (On pourra poser $x = 1 + X$).

Soit alors $\overline{\varphi}_1$ la fonction définie par

$$\begin{cases} \overline{\varphi}_1(x) &= \varphi_1 & \text{pour } x \text{ strictement positif et distinct de 1.} \\ \overline{\varphi}_1(1) &= \ell \end{cases}$$

En s'inspirant de B 1. c. , montrer que 2

$$\int_x^{x^2} \overline{\varphi}_1(t) dt \text{ tend vers 0 quand } x \text{ tend vers 1.}$$

- c.** Montrer que $H(x) - K(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
En déduire qu'on peut définir à partir de H une fonction à valeurs réelles \overline{H} , définie et continue sur $]0; +\infty[$, coïncidant avec H sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
3. **a.** Montrer que, quel que soit $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - x}{2 \operatorname{Log} x} \leq \overline{H}(x) \leq \frac{x^2 - x}{\operatorname{Log} x}$$

- b.** En déduire la limite de $\overline{H}(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

- c. En déduire également les limites de $\overline{H}(x)$ et de $\frac{\overline{H}(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- d. Rassemblant les résultats des trois questions de B, étudier les variations de \overline{H} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
(On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère; par ailleurs, en admettant que la dérivée de \overline{H} existe au point $x = 1$, et que $\overline{H}'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \overline{H}'(x)$, on précisera la tangente au point d'abscisse 1).