Durée : 4 heures

Baccalauréat C Reims juin 1976

EXERCICE 1

On pose

$$I(a,\ n) = \int_0^1 x^a(1-x)^n\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{N}^\star,\ n \in \mathbb{N}^\star$$

$$\text{et} \qquad I(a,\ 0) = \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties, montrer que

$$I(a+1,\ n) = \frac{a+1}{n+1} I(a,\ n+1)$$

2. Établir que $I(a,\ n) - I(a,\ n+1) = I(a+1,\ n)$.
   En déduire que

$$I(a,\ n+1) = \frac{n+1}{n+a+2} I(a,\ n)$$

3. a étant fixé, $(a \in \mathbb{N}^\star)$, calculer $I(a,\ 0)$ et démontrer par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$I(a,\ n) = \frac{1.2.3\ldots(n-1).n}{(a+1)(a+2).....(a+n+1)}$$

EXERCICE 2

En base 9, trouver tous les couples de chiffres $(x\ ;\ y)$ pour lesquels le nombre $\overline{7x6y4}$ est divisible par 7 et par 8.
(On pourra utiliser le système décimal comme intermédiaire).

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Partie A

On donne un point Ω de P et un nombre réel k strictement positif. Soit f l'application de P $-\{\Omega\}$ dans P $-\{\Omega\}$ définie par :

$$m \longmapsto M = f(m) \quad \text{tel que } \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega m}\right\|^2} \cdot \overrightarrow{\Omega m}.$$

1. Établir que $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega m}\right\|}$ et que f est une application involutive de P $-\{\Omega\}$ dans P $-\{\Omega\}$.
2. **a.** Quelle est l'image par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?
   b. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?

3. P est considéré comme plan complexe. Tout point $m(x\ ;\ y)$ de P a pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$; on note α l'affixe de Ω et Z l'affixe de M, image de m par f.

   Etablir la relation (1) $\quad Z = \alpha + \dfrac{k}{\overline{z-\alpha}}$.

   ($\overline{z-\alpha}$ désigne le conjugué de $z-\alpha$)

Partie B

On appelle f' l'application associée à la relation $Z - 1 = \dfrac{k}{\overline{z}-1}$ et f_1 celle associée à la relation $Z-1-b = \dfrac{b\overline{b}}{\overline{z-1-b}}$ où b et $\overline{b}$ sont deux nombres complexes conjugués ($b \neq 0$).

1. a. Sur quel ensemble E_1 la composée

$$\varphi_1 = f' \circ \left(f_1 \circ f'\right)$$

   est-elle définie ?

   b. Établir la relation entre les affixes de m et de son image par $f_1 \circ f'$, en déduire que la relation entre les affixes de m et de son image M_1 par φ_1 est

$$(2) \qquad Z_1 = \frac{b+\overline{b}+k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z}.$$

2. On pose désormais $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta)$.

   a. En utilisant la relation (2), montrer que φ_1 est alors la restriction à E_1 d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite Δ_1 passant par O. On appelle D la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$, déterminer l'angle $(D,\ \Delta_1)$.

   b. On appelle f_2 l'application associée à la relation

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{b\overline{b}}{\overline{z-1-\overline{b}}}$$

   et φ_2 la composée $\quad \varphi_2 = f' \circ \left(f_2 \circ f'\right)$.

   Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2 d'une symétrie orthogonale S_2 par rapport à une droite Δ_2 que l'on précisera.

   c. Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie P$'$ de P que l'on précisera.

   Préciser la nature de cette application R.

   Quelles valeurs doit-on donner à θ pour que R soit associée à la relation

$$Z = z\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right) ?$$

3. Soit les applications définies dans E$'$ = P $-\{$O$\}$ par

$$f_1' : x \longmapsto \frac{1}{\overline{z}}, \qquad f_2' : x \longmapsto \frac{1-k}{\overline{z}}.$$

   a. Montrer que la composée $h = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à E$'$ d'une homothétie que l'on précisera.

b. Quel est l'ensemble de définition de $h \circ R$?
Montrer que l'application $h \circ R$ est associée à la relation

$$(3) \qquad Z = (1-k)\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)z$$

pour un choix convenable de R.

4. On appelle u l'application de P dans P associée à la relation (3).
Déterminer la nature de u et ses éléments remarquables ; discuter selon les valeurs de θ.