Baccalauréat C Reims juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit un espace vectoriel euclidien E rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et soit l?endomorphisme g de E dans E défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g\left(\vec{\imath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}\right)\\ g\left(\vec{\jmath}\right) & = & \frac{1}{3}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-2\vec{k}\right)\\ g\left(\vec{k}\right) & = & \frac{1}{3}\left(-2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}\right)\end{array}\right.$$

1. Montrer que g est une transformation orthogonale de E.
   Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par g. Caractériser g.
2. Déterminer l'image par g du plan vectoriel engendré par les vecteurs $\left(\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}\right)$ et $\left(2\vec{\imath}-\vec{k}\right)$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

n est un entier naturel de $\mathbb{N}^{\star}$ et k un entier relatif quelconque.
On pose :
$z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \text{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}, \quad E_n = \{z_k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$

1. Quel est le nombre d'éléments de E_n ?
   Démontrer que $(E_n, \times)$ est un groupe abélien G.
   Représenter E_{12} dans le plan complexe.
2. Soit G$'$ un sous-groupe de G.
   a. Démonter que si z_k appartient à G$'$ et si p est un entier relatif quelconque, alors z_{kp} appartient à G$'$.
   b. En déduire que si G$'$ contient z_{k_1} et z_{k_2} il contient z_d où d est le p.g.c.d de k_1 et k_2.
3. Utiliser le 2. pour trouver tous les sous-groupes de E_{12}.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par (J 2 points)

$$f_m(x) = \text{Log}\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|.$$

où m est un paramètre réel. On appelle $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.
On appelle A le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$ et B le point de coordonnées $(1\,;0)$.

Partie A

1. Étudier les fonctions f_m dans les cas particuliers suivants :

$$m=0, \quad m=-1 \quad \text{et} \quad m=1.$$

   Tracer les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_{-1})$ et $(\mathcal{C}_1)$ dans un repère $\mathcal{R}$.
   Dans toute la suite, on supposera $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

2. Donner, en les justifiant, les ensembles de définition, de continuité, de dérivabilité de f_m. On désignera par la suite par $\mathcal{D}_{f_m}$ l'ensemble de définition de f_m.

a. Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par A et B .

b. Démontrer que les ensembles de définition de f_m et $f_{\frac{1}{m}}$ sont égaux et que, pour tout x de ces ensembles

$$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$$

En déduire que $(\mathcal{C}_m)$ et $\left(\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

c. Démontrer l'équivalence : $x \in \mathcal{D}_{f_{-m}} \iff (-x) \in \mathcal{D}_{f_m}$.

Démontrer : si $x \in \mathcal{D}_{f_{-m}}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$; en déduire que $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{-m})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

d. Déduire des questions précédentes, qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer $(\mathcal{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir les courbes $(\mathcal{C}_m)$ pour tout élément de $\mathbb{R} - \{-1,\ 0,\ 1\}$.

3. *On supposera dans cette question* $m > 1$.

a. Calculer $f'_m(x)$, f'_m étant la fonction dérivée de f_m.

b. Étudier les limites de f_m aux bornes des intervalles de définition de f_m ; en déduire pour $(\mathcal{C}_m)$ l'existence d'asymptotes dont on précisera les équations.

c. Donner le tableau de variations de f_m (on ne tracera pas la courbe $(\mathcal{C}_m)$) .

Partie B

Dans cette question $m = 2$;
On pourra prendre 0,7 comme valeur approché, de Log 2.

1. Etudier f_2 et tracer $(\mathcal{C}_2)$ dans un repère $\mathcal{R}$. Soit I_2 le point d'intersection de $(\mathcal{C}_2)$ et de son asymptote parallèle à la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\right)$.

Démontrer que I_2 est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_2)$.

2. En utilisant A 3. déduire alors la construction de $\left(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}\right)$ et $(\mathcal{C}_{-2})$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_2)$.

3. Soit g la restriction de f_2 à $\left]-2\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[$.

a. Démontrer que g est une bijection de $\left]-2\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

b. Définir analytiquement g^{-1} et construire dans un nouveau repère $\mathcal{R}$ la courbe représentative de g.