∽ Baccalauréat C Reims juin 1981 ∾

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$ et soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, associé à $\mathcal{V}$, et rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.
Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x\,;\ y\,;\ z)$ associe le point $M'\left(x'\,;\ y'\,;\ z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{r c l} x & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z\\ y' & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}+1\\ z' & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}+1. \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est un vissage. Préciser son axe.
2. Soit φ l'endomorphisme associé à f. Calculer $(\varphi\circ\varphi)\left(\vec{\imath}\right)$.
   Quel renseignement, relatif à l'angle de f, peut-on en déduire ?
3. Soit P le plan affine d'équation $y+z-2=0$.
   Déterminer $f(\text{P})$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation

$$6x-13y=5.$$

2. En déduire la solution générale, dans $\mathbb{Z}$, du système de congruences

$$\left\{\begin{array}{l c c l} x & \equiv & 2 & \text{modulo}\,6\\ x & \equiv & 7 & \text{modulo}\,13. \end{array}\right.$$

3. Donner la solution générale, dans $\mathbb{Z}$, du système de congruence

$$\left\{\begin{array}{l c c l} x & \equiv & 2 & \text{modulo}\,6\\ x & \equiv & 7 & \text{modulo}\,13.\\ x & \equiv & 1 & \text{modulo}\,7. \end{array}\right.$$

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques de la variable réelle définies et continues sur $\mathbb{R}$.
À tout élément f de $\mathcal{C}$ on associe la fonction $\tilde{f}$ telle que

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

pour tout réel x.

Partie A

1. Montrer que, pour toute primitive F de f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)).$$

2. Calculer $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$.

   Montrer que pour toute fonction polynôme f sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de même degré.

3. Calculer $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = |I|$ (pour le calcul de $\tilde{f}(x)$, on étudiera séparément les cas $x \leqslant -1$, $-1 < x < 1$, $x \geqslant 1$).

   Tracer dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives de f et de $\tilde{f}$ lorsque $f(t) = |t|$.

Partie B

1. Montrer que, pour toute $f \in \mathscr{E}$, la fonction $\tilde{f}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que

$$\left(\tilde{f}\right)'(x) = \frac{1}{2}[(x+1) - f(x-1)],$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que $\tilde{f}$ est une fonction croissante si, et seulement si, f est une fonction périodique admettant le nombre réel 2 pour période.

Partie C

1. On suppose f croissance sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même de $\tilde{f}$. Montrer que, pour tout réel x, on a

$$f(x-1) \leqslant \tilde{f}(x) \leqslant f(x+1).$$

   En déduire que si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} \tilde{f} = +\infty$, et que si $\lim\limits_{-\infty} f = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} \tilde{f} = 0$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{4\mathrm{e}^t}{t^2+4}.$$

   où e désigne la base des logarithmes népériens.

   Donner le tableau de variations de f. En déduire celui de $\tilde{f}$.