Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Reims ∽

EXERCICE 1 **4 points**

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
2. Montrer que pour tout entier relatif, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\dfrac{(2n-1)\left(2n^2+3n-1\right)}{\left(n^2-2\right)(n+2)}$ soit un entier relatif.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation
$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$$
dans l'ensemble des nombres complexes.
2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

PROBLÈME **12 points**

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On munit l'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ des endomorphismes de E de sa structure usuelle d'espace vectoriel. Pour chaque endomorphisme f de E, on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et $T(f)$ le réel $a+d$.
L'application identique de E sera notée Id.
On appelle F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ avec $(a,\ b,\ d)$ réels quelconques.

Partie A

On note f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de E de matrices
$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ respectivement dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de base $\left(f_1, f_2, f_3\right)$
2. Trouver deux éléments f et g de F tels que $g \circ f$ ne soit pas dans F.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme r de F, et un seul, vérifiant
$$\left\{\begin{array}{lcl} r\left(f_1\right) & = & \dfrac{1}{2}\left(f_1 - f_2 + f_3\right)\\ r\left(f_2\right) & = & f_1 - f_3\\ r\left(f_3\right) & = & \dfrac{1}{2}\left(f_1 - f_2 + f_3\right). \end{array}\right.$$

Soit un élément f de F tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$; calculer (en fonction de a, b, d) $M\left(f'\right)$ où $f' = r(f)$.

Partie B

Soit t la restriction de T à F.

1. Montrer que t est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le noyau de t, noté Ker$t$ est un plan vectoriel de F contenant toutes les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E.
3. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de E, on note $S_{\overrightarrow{u}}$; la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\overrightarrow{u}$.
   Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de E et soit α la mesure de l'angle du couple $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\overrightarrow{u}}$?
   Calculer $T(R)$ en fonction de α.

Partie C

Soit $\varphi : \text{F} \times \text{F} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(f,\ g) = T(g \circ f)\cdot$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur F.
2. **a.** Calculer $\varphi(f,\ \text{Id})$ pour tout $f \in F$.
   b. En déduire l'orthogonal de Ker t pour φ.
3. On reprend l'endomorphisme r de F défini à la question 3. de la première partie.
   a. Montrer que r est une isométrie vectorielle de F pour le produit scalaire φ.
   b. Calculer $r(\text{Id})$ et en déduire que $r(\text{Ker}t) = \text{Ker}t$.
   c. Calculer $\varphi(f,\ r(f))$ pour tout f élément de Ker$t$.
   d. En déduire que r est une rotation de F. Que peut-on dire de son angle ?