∽ Baccalauréat C Reims juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T de P dans P qui, à chaque point M d'affixe z, associe la point M' d'affixe z'
$z' = -\text{i}\overline{z} + 2 + 2\text{i}$.
2. Soit H le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de H en fonction de l'affixe z de M et de $\overline{z}$; en déduire, toujours en fonction de z et $\overline{z}$, la distance de M à H.
3. Préciser la nature et les caractéristiques géométriques de l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie :

$$|z+1+\text{i}| = \frac{1}{2}\left|z+\text{i}\overline{z}-2-2\text{i}\right|.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien P, on donne le triangle ABC rectangle en A et isocèle avec $AB = AC = a$, où a est un réel donné strictement positif.

1. **a.** Déterminer et construire la barycentre G du système $\{(A,\ 4)(B,\ -1)(C, 1)\}$.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

2. $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel associé à P.
   a. Soit $\overrightarrow{f} : \begin{array}{lcl} P & \to & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \end{array}$.
   Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une fonction constante que l'on précisera.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Étant donné un entier supérieur ou égal à 1, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et on considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}.$$

1. Montrer que $f(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes d'un suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Dire pourquoi $f(x)$ est intégrale sur [0 ; 1] et montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = u_n.$$

3. Vérifier que, pour $x \neq -1$, $f(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$.
4. En déduire que

$$u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

5. Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B

On considère les fonctions numériques F, G, H définies sur [0 ; 1] par :

$$F(x) = \ln(1+x), \quad G(x) = x - F(x), \quad H(x) = F(x) - x + x^2.$$

1. Étudier les variations de G et H sur [0 ; 1]. En déduire le signe de G et de H sur [0 ; 1].
2. Montrer que $x - x^2 \leqslant F(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$.
3. Étant donné un entier $k \geqslant 0$ et un entier $n \geqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{n+k}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant F\left(\frac{1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k}.$$

4. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_n &= F\left(\frac{1}{n}\right) + F\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + F\left(\frac{1}{2n}\right) \\ \text{et } a_n &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

   Montrer que $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_n \leqslant v_n \leqslant a_n$.
5. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = a_n - \dfrac{1}{n}$.
   Calculer $b_n - b_{n-1}$ (pour $n \geqslant 2$), puis comparer b_n au réel u_n défini dans la partie A (pour $n \geqslant 1$).
6. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Partie C

On considère la fonction numérique S définie sur [0 ; 1] par $S(x) = \sin(x)$ et la suite

$$w_n = S\left(\frac{1}{n}\right) + S\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + S\left(\frac{1}{2n}\right) \quad \text{(définie pour tout entier } \geqslant 1).$$

1. Montrer que $x - x^2 \leqslant S(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.