

∞ Baccalauréat C Reims juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Étant donné, dans un plan, une droite (Δ) et deux droites (T) et (T') , discuter l'existence d'une parabole admettant (Δ) comme directrice et tangente à (T) et (T') . On cherchera, pour cela, à construire le foyer de cette parabole.

EXERCICE 2

Déterminer les progressions géométriques de sept termes (à termes réels) telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1 250.

EXERCICE 3

On considère l'application qui, à tout nombre complexe z différent de -1 , associe le nombre Z défini par la formule

$$Z = \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 1} \quad (z \neq -1).$$

1. Déterminer les constantes a et b telles que

$$Z = z + a + \frac{b}{z + 1}.$$

2. On suppose que z décrit le corps des réels (sauf la valeur -1). b) Déterminer tous les entiers z tels que Z soit entier.

- a. Étudier les variations de la fonction qui, à z , fait correspondre Z . Représenter le graphe, (H) , de cette fonction par rapport à un repère orthonormé, Oz, Oz .
b. Soit C le point de rencontre des asymptotes de (H) , $\vec{i}$ le vecteur unitaire de Oz , $\vec{I}$ le vecteur unitaire de OZ , $\vec{j}$ le vecteur unitaire défini par $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ dans le plan orienté zOZ .

Si M est un point de (H) , exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ sous la forme

$\overrightarrow{CM} = u\vec{j} + v\vec{I}$, où u et v sont des fonctions de z , que l'on demande de déterminer.

En déduire que (H) est une hyperbole, dont on demande la distance focale.

- c. Calculer l'aire, S , du domaine compris entre OZ , la courbe (H) , la droite d'équation $Z = z + 4$ et la droite d'équation $z = e - 1$, où e est la base des logarithmes népériens (on pourra effectuer la translation des axes de coordonnées amenant l'origine au point d'abscisse -1 de l'axe Oz).

3. On suppose que z décrit le corps des complexes (sauf la valeur -1) et l'on pose

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY.$$

- a. Déterminer X et Y en fonction de x et y .

- b.** Au nombre complexe z on associe son image, $P(x ; y)$, dans le plan complexe. Quel est l'ensemble des points P tels que Z soit réel?
Donner alors, suivant les cas trouvés, l'expression de Z en fonction de la seule abscisse, x , du point P .
- 4.** On suppose que z décrit le corps des rationnels (sauf la valeur -1).
- a.** Démontrer que, si Z est entier, z est nécessairement entier (on prendra z sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$).
Il s'agit, dans ces deux dernières questions, d'entiers relatifs.