Reims juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie, pour x réel, par

$$x \longmapsto y = f(x) = x^3.$$

En appliquant à f le théorème des accroissements finis (qu'on rappellera sans le démontrer) entre deux valeurs, a et b, distinctes et positives, de la variable, établir qu'il existe, entre ces deux valeurs, un seul nombre, c, tel que $f'(c) = a^2 + ab + b^2$.

Montrer que ce nombre c est strictement compris entre $\dfrac{a+b}{2}$ et b (en supposant $b > a$).

EXERCICE 2

Sachant que $\dfrac{\text{Log}\, X}{X}$ a pour limite zéro quand $X \to +\infty$ (résultat du cours, concernant le logarithme népérien, qu'on ne démontrera pas ici), en déduire que :

1. $x\text{Log}\, x$ tend vers zéro quand x tend vers zéro par valeurs positives ;
2. $x\text{e}^x$ tend vers zéro quand $x \to -\infty$.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy.
Soit C le point d'abscisse $+3$ sur Ox. On considère le cercle (O), de centre O et de rayon 4, ainsi que le cercle (C), de centre C et de rayon 2.
Ces deux cercles se coupent en A et B ; on appelle I le milieu de OC et K le milieu de AB.

1. **a.** Calculer IK sans utiliser les équations des deux cercles.

   b. Écrire les équations des deux cercles et calculer les coordonnées de A et de B. Vérifier la valeur de IK.

2. Soit M un point du plan, de coordonnées x et y.

   On appelle $M(\text{O})$ et $M(\text{C})$ les puissances respectives de M par rapport aux cercles (O) et (C).

   a. Exprimer en fonction de x et y le rapport $u = \dfrac{M(\text{O})}{M(\text{C})}$.

   b. En déduire l'ensemble des points M tels que $u = 2$.

   Préciser les éléments géométriques de cet ensemble ; les points A et B en font-ils partie ?

3. On suppose que M décrit l'axe Ox ; $u = \dfrac{M(\text{O})}{M(\text{C})}$ est alors fonction de x seul.

   Étudier les variations de la fonction qui, à la variable x réelle, fait correspondre u.

   Construire le graphique cartésien de cette fonction, dans le repère Ox, Oy (les valeurs de u étant prises comme ordonnées), en figurant en même temps les cercles (O) et (C).

   Préciser le point où ce graphique coupe son asymptote parallèle à Ox et expliquer les particularités de la figure constituée par ce graphique et les deux cercles.

4. M est encore sur l'axe Ox.

   a. Pour quelles valeurs entières de x a-t-on u entier (il s'agit d'entiers relatifs, et l'on traitera cette question sans utiliser le graphique précédent, c'est-à-dire à l'aide de méthodes purement arithmétiques) ?

   b. Déterminer le plus petit entier positif n tel que, pour tout x supérieur ou égal à n, on ait $u < 2$.