Baccalauréat Reims septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

1. Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes x qui satisfont à l'équation

$$x^5 + 1 = 0.$$

2. En déduire que $x^5 + 1$ peut se mettre sous la forme d'un produit de cinq binômes du premier degré en x, à coefficients réels ou complexes.
   Démontrer qu'on peut écrire

$$x^5 + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right).$$

3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.

II.

Soit un plan rapporté à un repère orthonormé Ox,Oy.
On appelle cercle (C_0) tout cercle situé dans ce plan et vu de l'origine sous un angle 2θ, c'est-à-dire tel que les tangentes issues de O à ce cercle fassent un angle de mesure 2θ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right.$; il s'agit de l'angle dans lequel se trouve le cercle).

Partie A

1. Connaissant le centre, ω, de coordonnées $(\alpha ; \beta)$, de (C_0), calculer le rayon de (C_0) et en déduire l'équation de (C_0).
2. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Partie B

Dans cette question, on impose aux cercles (C_0) de passer par le point A de coordonnées $(a ; 0)$, où $a > 0$ est fixé.

1. Déterminer géométriquement, pour θ fixé, l'ensemble (L_0) des centres des cercles (C_0). Discuter, suivant θ, la nature de (L_0).
2. Discuter analytiquement le nombre de cercles(C_0) passant par A et tels que l'origine, O ait, par rapport à eux, une puissance positive donnée p^2.

Partie C

Dans cette question, on impose aux cercles (C_0) d'être tangents à la droite (D) d'équation $x = a$ (a ayant la même valeur, positive, que dans B).

1. Déterminer, géométriquement et analytiquement, l'ensemble (Γ_0) des centres des cercles (C_0), pour θ fixé.
   Discuter, suivant θ, la nature des courbes obtenues.
2. Pour une valeur fixée de θ, telle que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, que représentent, pour (Γ_0), les points de (Γ_0) situés sur Ox?
   En déduire que les cercles directeurs relatifs au foyer non fixe des courbes (Γ_0) appartiennent à un faisceau linéaire de cercles, que l'on précisera.