Baccalauréat Reims septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{4-x^2} < x+1$$

en étudiant, dans un repère orthonormé, Ox, Oy, les représentations graphiques des fonctions définies respectivement par

$$y_1 = \sqrt{4-x^2} \quad \text{et} \quad y_2 = x+1.$$

II.

On donne, dans l'espace, deux points fixes distincts, A et B.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\left(\overrightarrow{\text{MA}} + 2\overrightarrow{\text{MB}}\right)$ soit orthogonal au vecteur $\left(2\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}}\right)$.

III.

Soit un plan (P) rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy. On désigne par E l'ensemble des points M de l'axe des x tels qu'il existe un point M$'$ de cet axe vérifiant

$$\overline{\text{OM}} \cdot \overline{\text{OM}'} = 2\left(\overline{\text{OM}} + \overline{\text{OM}'}\right).$$

1. **a.** Établir que E comprend tous les points de l'axe des x, à l'exception d'un point, qu'on précisera.

   b. Établir qu'à chaque point M de E ne correspond qu'un seul point M$'$.

   c. On appelle T la transformation qui, à M de E, fait correspondre M$'$. Quels sont les points invariants de T ?

   Démontrer que M et M$'$ sont conjugués par rapport à ces points invariants et qu'il existe un point fixe, I (que l'on précisera), tel que l'on ait $\overline{\text{IM}} \cdot \overline{\text{IM}'} = k$ (constante que l'on précisera) quel que soit M de E.

   d. Soit Γ_{M} le cercle de diamètre MM$'$.

   Caractériser géométriquement l'ensemble des cercles Γ_{M}, quand M parcourt E.

   Quel est l'ensemble des transformés des cercles Γ_{M} par l'inversion de pôle O et de puissance 16 ?

2. À tout point M de E, on fait correspondre le point N de l'axe des y dont l'ordonnée, y, est liée à l'abscisse, x, de M par

$$xy - 2(x+y) = 0.$$

   a. Soit P le point défini par $\overrightarrow{\text{OP}} = \overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{ON}}$.

   Quel est l'ensemble, (H), des points P obtenus quand M parcourt E ?

   b. Déterminer tous les points de (H) dont les coordonnées sont toutes deux des entiers relatifs.

c. M décrivant E privé du point O, démontrer que la droite MN passe par un point fixe, S, qu'on précisera. Quelles sont les droites du faisceau de sommet S qui ne sont pas ainsi obtenues ?

3. Soit z et z' deux nombres complexes liés par la relation $zz' - 2\left(z + z'\right) = 0$.
On pose $z = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$, avec $r \geqslant 0$ et $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

a. Quelle est la relation qui doit lier r et θ pour que z et z' soient conjugués ?

b. Au nombre complexe $z = x + \text{i}y$, on fait correspondre, dans le plan (P), le point Q de coordonnées x et y.
Quel est l'ensemble des points Q pour lesquels z et z' sont conjugués ?

c. Déterminer l'ensemble des points Q pour lesquels z' a pour module 2.

N. B. - La question **3.** est indépendante des deux autres.