Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1974 Rennes ∾

EXERCICE 1

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $3+10^n$ soit divisible par 7.

EXERCICE 2

P est un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Soit I et J les points de P tels que $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \vec{\jmath}$. On désigne par R_{I} et R_{J} les rotations de centres respectifs I et J et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ (mesuré en radians), et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$. Soit S la transformation :

$$S = R_{\mathrm{J}} \circ T \circ R_{\mathrm{I}}.$$

1. Déterminer la nature de S.
2. Achever la caractérisation de S.

PROBLÈME

N. B. - Les parties B et C, sauf une partie de B - 2. sont indépendantes de A.
Les questions C -1. et C - 2. peuvent être traitées sans qu'une base $\left(\varphi_0,~\varphi_1,~\varphi_2\right)$ ait été trouvée en B 3.

Partie A

Soit f une fonction *continue* sur $[-1~;~+1]$ et telle que, pour tout x élément de $[-1~;~+1]$, $f(x) \geqslant 0$.
On sait qu'alors $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
On suppose, en outre, qu'il existe un nombre x_0 de l'intervalle $[-1~;~+1]$ tel que $f\left(x_0\right) \neq 0$, c'est-à-dire que f n'est pas la fonction nulle sur $[-1~;~+1]$.

1. Montrer, en utilisant la définition de la continuité d'une fonction, qu'il existe au moins un intervalle $[a~;~b]$ inclus dans $[-1~;~+1]$ avec $a \neq b$ et tel que :

$$\forall x \in [a~;~b],\quad \left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| \leqslant \dfrac{f\left(x_0\right)}{2}.$$

2. En déduire que, pour tout x appartenant à cet intervalle $[a~;~b]$: $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}f\left(x_0\right)$, puis que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

Partie B

Soit E l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels, définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer brièvement que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de E?

2. Montrer que l'application de E × E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f\ ;\ g) \longmapsto \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur E.

(On pourra utiliser A pour démontrer l'une des propriétés du produit scalaire).

On posera $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = < f,\ g >$ et $\sqrt{< f,\ g >} = \|f\|$.

3. Vérifier que les fonctions polynômes P_0 et P_1 définies, pour tout x réels, par : $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$, sont orthogonales pour ce produit scalaire, c'est-à-dire que $< P_0,\ P_1 >= 0$.

Déterminer une fonction polynôme P_2 de degré 2 orthogonale à la fois à P_0 et P_1.

Calculer $\|P_0\|$, $\|P_1\|$, $\|P_2\|$.

En déduire une base orthonormée $\left(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2\right)$ de E.

Partie C

Pour toute fonction polynôme P, élément de E, c'est-à-dire à coefficients réels, définie sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à 2, on pose

$$I(P) = \int_{-1}^{+1} \left[\mathrm{e}^x - P(x)\right]\,\mathrm{d}x.$$

On se propose de déterminer un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$\forall P \in \mathrm{E},\quad I\left(P_m\right) \leqslant I(P) \qquad (1)$$

et de calculer $I\left(P_m\right)$.

Pour cela, on pose $P = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ où $\left(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2\right)$ désigne la base orthonormée trouvée en B 3. et α_0, α_1, α_2 trois nombres réels.

1. Déterminer, sans calcul, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} [P(x)]\,\mathrm{d}x$ en fonction de α_0, α_1 et α_2 ?

2. On suppose connues les intégrales :

$$a_i = \int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^x\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pour } i \in \{0,\ 1,\ 2\}$$

Démontrer que :

$$I(P) = \int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \left(\alpha_0 - a_0\right)^2 + \left(\alpha_1 - a_1\right)^2 + \left(\alpha_2 - a_2\right)^2$$

Comment faut-il choisir α_0, α_1 et α_2 pour que $I(P)$ soit le plus petit possible ? En déduire qu'il existe un polynôme P de E et un seul satisfaisant à (1).

3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(3x^2 - 1\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

En déduire :

a. a_0, a_1, a_2.

b. $I\left(P_m\right)$.

c. L'expression explicite de $P_m(x)$ sous la forme $a + bx + cx^2$, avec a, b, c réels.