Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes juin 1970

EXERCICE 1

Soit f la fonction qui, à un nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $(x-3)\sqrt{x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ la courbe (C) représentant les variations de f.
3. La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ coupe (C) en O et en A.
   Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'arc OA de (C) et la corde OA. [L'unité d'aire est celle du carré qui a pour sommets opposés les points O, $(0~;~+1)$ et $(+1~;~0)$.]

EXERCICE 2

Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation

$$7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right)$$

EXERCICE 3

1. Un plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit A le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(+2~;~0)$. À un nombre réel λ et à un point P de $\mathscr{P}$, on fait correspondre le point M de $\mathscr{P}$, barycentre des trois points O, A et P affectés des coefficients

   $$\frac{1}{2}\ \text{pour O}, \quad \frac{1}{2} - \lambda\ \text{pour A} \quad \text{et} \quad \lambda\ \text{pour P.}$$

   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en fonction de λ, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.
   En déduire, entre λ, les coordonnées $(u~;~v)$ de P et les coordonnées $(x~;~y)$ de M, les relations

   $$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1 - 2\lambda + \lambda u,\\ y & = & \lambda v.\end{array}\right.$$

2. Dans cette question, λ désigne *un nombre fixe donné*.
   Alors la correspondance introduite ci-dessus définit une application, f_λ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$,

   $$\mathrm{M} = f_\lambda(\mathrm{P}).$$

   a. Montrer qu'il existe un nombre réel λ_0 tel que, si λ est différent de λ_0, f_λ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$.
   Étudier le cas particulier de l'application f_{λ_0}.

   b. Existe-t-il un point de $\mathscr{P}$ invariant par f_λ ?
   Si $\lambda \neq \lambda_0$, trouver une transformation classique simple donnant de chaque point de $\mathscr{P}$ la même image que f_λ.

c. Étudier l'ensemble des points P tels que AM = AP.
Quel est l'ensemble des points M correspondants ?

3. Dans cette question on considère la famille $\mathscr{F}$ des transformations f_λ obtenues lorsque λ décrit $\mathbb{R} - \{\lambda_0\}$.
Montrer que, quels que soient les nombres réels λ et λ' différents de λ_0, $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$ n'appartient pas à la famille $\mathscr{F}$.

4. Dans cette question, P désigne *un point fixe donné de* $\mathscr{P}$. La correspondance introduite à la question 1. définit alors une application g_{P} de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{P}$.

$$\text{M} = g_{\text{P}}(\lambda)$$

a. Montrer que l'ensemble des points $\text{M} = g_{\text{P}}(\lambda)$ obtenu lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est une droite D_{P}.

b. Soit $g_{\text{P}}^\star$ l'application de $\mathbb{R}$ dans D_{P} qui, à λ réel, associe le point $g_{\text{P}}(\lambda)$ de D_{P}. L'application $g_{\text{P}}^\star$ est-elle bijective ?

5. On considère maintenant l'application de $\mathscr{P}$ dans l'ensemble des droites $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ qui associe à P la droite D_{P} définie dans la question précédente.
Cette application est-elle injective ?
Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire une droite (D) du plan $\mathscr{P}$ pour qu'elle soit l'image d'un point P par cette application.

6. Dans cette question, à tout nombre réel λ, on associe le point P_λ de coordonnées ($u = \lambda$ et $v = \lambda$) et le point M défini à la question 1., barycentre de O, A et P_λ affectés respectivement des coefficients $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} - \lambda$et λ. Soit h l'application qui, à tout nombre réel λ, associe de cette manière un point M de $\mathscr{P}$

$$\text{M} = h(\lambda).$$

a. Exprimer les coordonnées x et y de M en fonction de λ.

b. Montrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $\text{M} = h(\lambda)$ est inclus dans la courbe (Γ) d'équation cartésienne

$$(x - y - 1)^2 - 4y = 0.$$

c. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à (Γ) au point $\text{M} = h(\lambda)$. Écrire en particulier les équations des tangentes à (Γ) aux points de (Γ) situés sur les axes du repère Ox, Oy.

d. Reconnaître la courbe (Γ) en déterminant son équation dans un repère dont les axes ont pour supports les bissectrices des droites Ox et Oy.
Construire (Γ) et préciser l'ensemble des points M quand λ décrit $\mathbb{R}$.