Baccalauréat C Rennes juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - 2(1+3\mathrm{i})z^2 - 4(1-5\mathrm{i})z + 16(1-\mathrm{i}) = 0. \qquad (1)$$

a. Démontrer que cette équation admet une solution réelle $z_1 = \alpha$, puis la résoudre.

b. Représenter dans le plan complexe les images des solutions de l'équation (1).

2. Démontrer que les solutions de l'équation (1) constituent les trois premiers termes d'une suite géométrique dont le premier terme u_0 est α et dont on donnera la raison.

Calculer le 17^{e} terme u_{16} et écrire le terme général de cette suite.

Déterminer n pour que u_n appartienne à $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

PROBLÈME **13 POINTS**

N.B. – La partie C peut être traitée indépendamment de A et B en utilisant le résultat donné en B 4.

Dans le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e_2}\right)$, on désigne par A le point de coordonnées $(-1~;~0)$, par B le point de coordonnées $(1~;~0)$, par ω le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}~;~0\right)$.

Partie A

Soit M le point mobile dont les coordonnées sont définies en fonction du temps t par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) - \dfrac{1}{2}\\ y & = & \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right). \end{array}\right.$$

1. Montrer que la trajectoire de M, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, est une partie (H_1) d'une conique (H) de centre ω.

Donner les éléments caractéristiques de (H) et construire (H) dans (P). Préciser (H_1). (On prendra 6 cm comme unité.)

2. Déterminer à tout instant t, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$.

   Quelle est l'allure du mouvement de M sur sa trajectoire (H_1) ?

   Représenter avec précision le point M associé à $t = \log 3$ (où log désigne le logarithme népérien) et les points $U,\ W,\ m$ définis par :

$$\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{V(t)} \quad , \quad \overrightarrow{MW} = \overrightarrow{\Gamma(t)} \quad , \quad \overrightarrow{\omega m} = \overrightarrow{V(t)}.$$

   Montrer que $\omega,\ M$ et W sont alignés.

   Quelle est la nature du quadruplet $(\omega,\ M,\ U,\ m)$?

Partie B

On désigne par $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$ le plan (P) privé du point O et pour toute partie (E) de (P) on pose $\left(\mathrm{E}^{\star}\right) = (\mathrm{E}) \cap \left(\mathrm{P}^{\star}\right)$.
Soit φ l'application de $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z $(z \neq 0)$ associe le point M' dont l'affixe z' est définie par

$$z' \cdot \overline{z} = 1,$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Montrer que φ est involutive et que pour tout point M de $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$, les points $O,\ M$ et M' sont alignés.

   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M'}$.
2. Quel est l'ensemble des points invariants par φ ?
3. Donner l'expression analytique de φ.
4. $\left(\Sigma^{\star}\right)$ étant l'image de $\left(H^{\star}\right)$ par φ, on appelle (Σ) l'ensemble défini par $(\Sigma) = \left(\Sigma^{\star}\right) \cup \{0\}$.

   Montrer que dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e_2}\right)$ du plan (P), une équation de (Σ) est

$$x\left(x^2 + y^2\right) + x^2 - y^2 = 0.$$

Partie C

L'objet de cette partie est de construire (Σ) et d'en chercher une définition géométrique.

1. Montrer que (Σ) est la réunion de deux courbes (Σ_1) et (Σ_2) représentatives des fonctions f et $-f$ de la variable x définies par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

2. Étudier la dérivabilité de f pour $x = 0$ et la dérivabilité à droite pour $x = -1$.

   Préciser les tangentes éventuelles à (Σ_1) aux points O et $A(-1\ ;\ 0)$.
3. Étudier les variations de f, tracer (Σ_1). En déduire (Σ). (On prendra $\sqrt{5} \approx 2,25$).
4. Soit (D) la droite d'équation $x = 1$, (C) le cercle centré en $B(1\ ;\ 0)$ et passant par O.

   Une droite (Δ) d'équation $y = \lambda x$ coupe (D) en R, (C) en O et Q, (Σ) en O et N.

   Établir que, quelque soit le réel λ, $\overrightarrow{\mathrm{O}N} = \overrightarrow{QR}$.

   En déduire une construction géométrique simple de (Σ).

   Placer en particulier les points d'intersection de (C) et (Σ).