Baccalauréat C Rennes juin 1973

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que :

$$5^{2n} + 5^n \equiv 0 \quad \text{modulo } 13$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + \text{Log}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

où le symbole Log désigne le logarithme népérien.
Soit C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ (on prendra 2 cm comme unité de longueur).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est impaire. Étudier les variations de f.
   Construire la courbe C.
2. On coupe la courbe C par la droite Δ_λ d'équation

   $$y = x + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

   Montrer que Δ_λ coupe C, en général, en deux points M_1 et M_2 dont on déterminera les coordonnées en fonction de λ.
   Calculer le produit des abscisses des points M_1 et M_2.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien Π est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
Soient T_1 et T_2 les transformations de Π dans Π telles que, si $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées d'un point quelconque M de Π, $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ celles de $M_1 = T_1(M)$ et $\left(x_2\,;\,y_2\right)$ celles de $M_2 = T_2(M)$, on ait :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& x\\ y_1 &=& -x\sqrt{2} - y\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_2 &=& -x - y\sqrt{2}\\ y_2 &=& y\end{array}\right.$$

1. **a.** On étudie l'ensemble des points M de Π $\{O\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des points de Π distincts de l'origine O) tels que :

   $$\overrightarrow{\text{O}M_1} = \lambda_1\overrightarrow{\text{O}M}$$

   où λ_1 désigne un nombre réel.
   Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour λ_1 afin que cette condition soit satisfaite :

   $$\lambda_1 = +1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = -1$$

   Déterminer l'ensemble Δ_1', des points M tels que $\overrightarrow{\text{O}M_1} = \overrightarrow{\text{O}M}$ et l'ensemble Δ_1'' des points M tels que $\overrightarrow{\text{O}M_1} = -\overrightarrow{\text{O}M}$

Montrer qu'à tout point M de Π correspond un couple unique de points $\left(M_1', M_1''\right)$ $M_1' \in \Delta_1'$ et $M_1'' \in \Delta_1''$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{O}M} = \overrightarrow{\text{O}M_1'} + \overrightarrow{\text{O}M_1''}$$

Montrer que le milieu de MM_1 est sur une droite fixe ; faire une figure et décrire la transformation T_1.

b. Étudier de la même façon l'ensemble des points M de Π $\{O\}$ tels que

$$\overrightarrow{\text{O}M_2} = \lambda_2\overrightarrow{\text{O}M} \quad (\lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour λ_2 : λ_2' et λ_2''.

Déterminer les ensembles Δ_2' et Δ_2'' tels que $\overrightarrow{\text{O}M_2} = \lambda_2'\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}M_2} = \lambda_2''\overrightarrow{\text{O}M}$.

Montrer qu'à tout point M de Π correspondent de manière unique deux points $M_2' \in \Delta_2'$ et $M_2'' \in \Delta_2''$ tels que

$$\overrightarrow{\text{O}M} = \overrightarrow{\text{O}M_2'} + \overrightarrow{\text{O}M_2''}$$

Déterminer la nature de la transformation T_2.

2. On pose $T = T_2 \circ T_1$. $P = T(M) = T_2\left[T_1(M)\right]$ et on désigne par $(u\ ;\ v)$ les coordonnées de P.

Calculer u et v en fonction de x et y, puis x et y en fonction de u et v. Montrer analytiquement que l'image par T d'une droite est une droite (on se donnera une droite par son équation cartésienne $ax + by + c = 0$).

Expliquer géométriquement le résultat.

Une droite peut-elle être parallèle à sa transformée ? Perpendiculaire à sa transformée ?

3. **a.** Soit les vecteurs $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\imath} - \sqrt{2}\overrightarrow{\jmath}$.

Montrer que $\overrightarrow{I}$ est un vecteur directeur d'une droite dont les points sont invariants par T_1 et que $\overrightarrow{J}$ est un vecteur directeur d'une droite invariante par T_2.

b. Soit $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de M et $(U\ ;\ V)$ celles de $P = T(M)$ dans le nouveau repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$.

Calculer U et V en fonction de X et Y, puis X et Y en fonction de U et V.

c. Soit (H) l'hyperbole d'équation $XY = k$ (k nombre réel donné) dans le nouveau repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Soit (C) la transformée de (H) par T.

Déterminer les équations de $(C) = T(H)$ d'une part dans le nouveau repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$, d'autre part dans l'ancien repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes qui sont les transformées par T des asymptotes de (H).