Baccalauréat C Rennes septembre 1970

EXERCICE 1

La transformation ponctuelle T associe au point M d'affixe z, dans le plan complexe privé du point A(+1 ; 0), le point M' d'affixe z'

$$z' = \frac{z-1+\mathrm{i}}{z-1}.$$

Montrer que T est égale à sa transformation réciproque ; donner le module et l'argument de ses points doubles.

EXERCICE 2

1. Quel est l'ensemble des diviseurs du nombre 72 ?
2. Soit p un nombre entier naturel ; mettre le nombre entier relatif

$$p^2 - 6p - 63$$

sous la forme d'une différence de deux entiers naturels, l'un d'eux étant un carré parfait, l'autre ne dépendant pas de p.
En déduire tous les couples $(p\,;\,q)$ d'entiers naturels, solutions de l'équation

$$p^2 - 6p - 63 = q^2.$$

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Soit $\vec{V}$ la fonction vectorielle de la variable réelle t telle que

$$V(t) = \frac{1}{t}\vec{\imath} + \frac{2t}{t-1}\vec{\jmath} + \left(\frac{t}{t-1}\right)^2\vec{k}.$$

1. Quel est l'ensemble $\mathbb{R}'$ des valeurs de t sur lequel la fonction $\overrightarrow{V(t)}$ est définie ?
Calculer la fonction vectorielle dérivée $\overrightarrow{V'(t)}$ de $\overrightarrow{V(t)}$ par rapport à t.
Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{V\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\overrightarrow{V'\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\overrightarrow{V(-1)}$ et $\overrightarrow{V'(-1)}$?
2. **a.** À t, appartenant à $\mathbb{R}'$, on fait correspondre le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \overrightarrow{V(t)}$. Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M ainsi obtenus lorsque t décrit $\mathbb{R}'$.
Soit λ un paramètre réel ; discuter suivant les valeurs de λ le nombre des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec le plan d'équation $z = \lambda$.
Quel est l'ensemble $(\mathscr{L})$ des valeurs de λ pour lesquelles le plan $z = \lambda$ coupe $(\mathscr{C})$ en deux points M' et M'' ?
b. Pour λ donné dans $(\mathscr{L})$, calculer

$$M'M''^2 = \varphi(\lambda).$$

($M'M"^2$ est le carré de la distance des deux points M' et M''.)
Étudier les variations de la fonction φ ainsi définie sur $(\mathscr{L})$; en particulier, montrer qu'elle admet un minimum et donner la valeur λ_0 de λ pour laquelle ce minimum est atteint.

c. À tout λ, appartenant à $(\mathscr{L})$, on fait correspondre le milieu, I, du segment $M'M"$; quel est l'ensemble des points I ainsi obtenus ?

3. Soit $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ les projections respectives de $(\mathscr{C})$ sur les plans $x\text{O}y$ et $y\text{O}z$.

Trouver les équations cartésiennes $y = f_1(x)$ de $(\mathscr{C}_1)$ et $z = f_2(y)$ de $(\mathscr{C}_2)$.

Quelle est la nature de chacune des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$?

Retrouver les paramètres directeurs de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point correspondant à $t = \dfrac{1}{2}$ obtenus à la question 1 ?

4. Montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$, $\overrightarrow{V(t)}$ tend vers une limite $\overrightarrow{W}$, dont on calculera les composantes.

Même étude lorsque $t \to -\infty$.

Soit A le point de l'espace tel que $\overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{W}$.

Montrer que la courbe $(\mathscr{C}) \cup \{\text{A}\}$ admet une tangente en A ; donner les composantes d'un vecteur directeur de cette tangente.