Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes juin 1969

EXERCICE 1

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation en z

$$\mathrm{i}z^2+(4\mathrm{i}-3)z+\mathrm{i}-5=0.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f de la variable réelle x, définie par

$$f(x)=\sqrt{(2x-2)(5-x)}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction, et construire sa courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Reconnaître la nature de la courbe (C). Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe $x'\mathrm{O}x$.

PROBLÈME

1. Dans le plan (Ω) rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, soit (Δ) la droite d'équation $x=1$.
   a. Déterminer l'ensemble (Δ_0) des points m de (Ω) tels que, si m n'appartient pas à (Δ_0) [(donc si $m\in(\Omega)-(\Delta_0)$], il existe un point M, et un seul, symétrique de m par rapport au point de rencontre des droites $\mathrm{O}m$ et (Δ).
   b. Déterminer la partie (Ω_0) de (Ω) - (Δ_0) telle que l'application qui, à un point m de (Ω_0), fait correspondre le point M ainsi défini soit une transformation injective, $\mathcal{T}$, de (Ω_0) dans (Ω_0). Montrer que $\mathcal{T}$ est involutive.
   c. Si m a pour coordonnées x et y, montrer que celles de M sont X et Y telles que

$$X=2-x \quad \text{et} \quad Y=\frac{y(2-x)}{x}.$$

   Dans la suite du problème, on confondra, dans le langage, une figure (γ) du plan (Ω) et son intersection $\left(\gamma_0\right)$ avec (Ω_0). En conséquence, si la transformée, (Γ_0), de $\left(\gamma_0\right)$ par $\mathcal{T}$ est l'intersection avec (Ω_0) d'une figure (Γ) de (Ω), on conviendra de dire que (Γ) est la transformée de (γ) par $\mathcal{T}$.
2. Déterminer analytiquement par son équation cartésienne et représenter graphiquement la transformée de chacune des figures suivantes :
   a. la droite d'équation $x=\lambda$, où λ est un nombre réel donné non nul et différent de 2 ;
   b. la droite d'équation $y=\mu$, où μ est un nombre réel donné non nul ;
   c. la droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}-1$;
   d. la parabole d'équation $y=x^2$. Montrer que, dans ce cas, il existe un déplacement permettant de passer de la courbe à sa transformée.

3. Soit $\left(\Delta'\right)$ la droite de (Ω) d'équation $x = 2$ et (γ) une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, qui admet, en un point a d'abscisse u ($u \neq 0$ et $u \neq 2$), une tangente coupant $\left(\Delta'\right)$ en J.

Montrer que la courbe (Γ), transformée de (γ) par $\mathcal{T}$, admet une tangente au point $\text{A} = \mathcal{T}(a)$.

En fonction des coordonnées de a, u et $v = f(u)$ et de la pente, $w = f'(u)$, de la tangente à (Γ) en a, écrire l'équation de la tangente à $(\Gamma) = \mathcal{T}_{(\gamma)}$ en $\text{A} = \text{T}_{(a)}$ et calculer l'ordonnée, y_K de son point d'intersection, K, avec $\left(\Delta'\right)$.

Montrer que le point I, intersection de OA avec $\left(\Delta'\right)$, est le milieu de JK.

Application – On prend comme courbe (γ) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$, dont on a étudié la transformée, (Γ), à la question 2. c.

(Γ) a deux asymptotes. En utilisant le résultat que l'on vient de démontrer, retrouver une propriété connue de cette courbe particulière (Γ), en l'occurrence :

A est le milieu du segment déterminé par les deux asymptotes sur la tangente à (Γ) en A.